Rüdiger Bücker

LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN VON ENTSCHEIDUNGSPROBLEMEN UNTER ANWENDUNG DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE

Dargestellt am Beispiel einiger Betriebswirtschaftlicher Entscheidungssituationen

1972

1973

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547219_0022

LÖSUNGSMÖGLICHKEITEN VON ENTSCHEIDUNGSPROBLEMEN UNTER ANWENDUNG DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE

DARGESTELLT AM BEISPIEL EINIGER BETRIEBSWIRTSCHAFTLICHER ENTSCHEIDUNGSSITUATIONEN

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
eines Doktors der Wirtschaftswissenschaft
durch den
Fachbereich Wirtschafts- und Sozialwissenschaften
der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster

vorgelegt von
Rüdiger Bücker
aus Münster
1972

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Erster Berichterstatter: Prof. Dr. Josef Bleymüller
Zweiter Berichterstatter: Prof. Dr. Herbert Gülicher
Dekan: Prof. Ph. D. Richard Hugh Tilly

Tag der mündlichen Prüfung: 13./14. November 1972

INHALTSVERZEICHNIS

1 Einführung 1

2 Die Grundlagen der Bayesschen Entscheidungslehre 5

2 - 1 Ableitung und Darstellung des Bayesschen Theorems 5

2 - 2 Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe der Bayesschen Entscheidungslehre 12

2 - 3 Der Erwartungswert als Bayessches Entscheidungskriterium 18

2 - 4 Die Einordnung der Bayesschen Entscheidungslehre in das allgemeine Grundmodell der Entscheidungstheorie ... 20

2 - 5 Das Verhältnis zwischen Bayesschen und Klassischem Konzept der statistischen Entscheidungstheorie 25

3 Die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre bei Entscheidungproblemen im Revisionswesen 29

3 - 1 Der Prüfungsprozeß als Entscheidungsprozeß 29

3 - 2 Das Problem der Schätzung von Fehleranteilen bei Anwendung klassischer Lösungsverfahren 33

3 - 3 Die Schätzung von Fehleranteilen auf Bayesscher Grundlage 41

3 - 4 Kritische Würdigung der Bayesschen Entscheidungslehre als Grundlage zur Gewinnung eines Prüfungsurteils .. 75

4 Lösung von Entscheidungsproblemen im Absatzbereich unter Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre 81

4 - 1 Die zentrale Bedeutung von Marketing-Entscheidungen 81

4 - 2 Die Bayessche Entscheidungslehre bei Entscheidungen über die Einführung neuer Produkte für den Fall kontinuierlich verteilter Absatzmöglichkeiten 84

4 - 3 Bayessche Prä-posteriori-Analyse als Instrument zur Einbeziehung der Informationskosten in das Entscheidungskalkül 110

4 - 4 Zusammenfassende Beurteilung der Bayesschen Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen 134

5 Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre bei Entscheidungen im Produktionsbereich 143

5 - 1 Bayessche Lösung des Problems der Maschineneinstellung als sequentielles Entscheidungsverfahren 143

5 - 2 Weitere Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre bei Entscheidungen im Produktionsbereich 168

6 Die Bayessche Entscheidungslehre als Grundlage der Investitions- und Finanzplanung 179

6 - 1 Bayessche Analyse von Investitionsentscheidungen mit Hilfe von Entscheidungsbäumen 179

6 - 2 Bayessche Prognose des Liquiditätsrisikos von Finanzierungsentscheidungen 189

7 Diskussion der allgemeinen Kritikpunkte an der Bayesschen Entscheidungslehre 195

7 - 1 Der Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeiten 195

7 - 2 Die Verwendung des Geldwertes als Nutzenmaß..... 209

7 - 3 Die Zweckmäßigkeit des Theorems des maximalen Erwartungswertes als Entscheidungskriterium 214

7 - 4 Die Problematik der Berücksichtigung sämtlicher Umweltkonstellationen 217

8 Schlußbetrachtung 219

Symbolverzeichnis 224

Literaturverzeichnis 225

Verzeichnis der Tabellen III

Verzeichnis der Abbildungen VI

Abkürzungsverzeichnis VIII

VERZEICHNIS DER TABELLEN

Tabelle 2-1	Ergebnismatrix zum allgemeinen Entscheidungsmodell	23
Tabelle 3-1	Berechnung der kumulierten A-posteriori Wahrscheinlichkeiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei $x = 2$ und unterstellter Gleichverteilung der $W(\Theta_i)$	42
Tabelle 3-2	Bestimmung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten mittels der Verteilungsfunktion	
Tabelle 3-3	Fehlerhöchstgrenzen bei subjektiven und gleichverteilte $W(\Theta_i)$	57
Tabelle 3-4	Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ und unterstellten subjektiven $W(\Theta_i)$	58
Tabelle 3-5	Bestimmung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten mittels der Verteilungsfunktion bei weniger feiner Unterteilung der Fehlerquoten	62
Tabelle 3-6	Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei $x = 2$ und weniger feiner Aufteilung der Fehlerquoten Θ_i	63
Tabelle 3-7	Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierenden A-priori-Wahrscheinlichkeiten für $x = 2$ und $n = 100$	66
Tabelle 3-8	Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenen Fehleranteil Θ_c bei Variation der A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$	67
Tabelle 3-9	Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierendem Stichprobenergebnis x_j für $n = 100$ und $W(\Theta_i)$ = sehr günstig	69
Tabelle 3-10	Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenenFehleranteil Θ_c bei Variation des Stichprobenergebnisses x_j	70
Tabelle 3-11	Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierendem Stichprobenumfang n für $x = 2$ und $W(\Theta_i)$ = sehr günstig	72
Tabelle 3-12	Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenen Fehleranteil Θ_c bei Variation des Stichprobenumfangs n bei konstantem x_j	74

Tabelle 4-1	Gewinne bzw. Verluste bei Einführung bzw, Nicht-Einführung des neuen Produkts in Mio DM	85
Tabelle 4-2	Erwartungswerte der Aktionen a_i bei subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $E_o(a_i)$	86
Tabelle 4-3	A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(s_j/x_i)$ für vorgegebene $W_o(s_j)$ und x = 15	89
Tabelle 4-4	A-posteriori-Erwartungswerte $E_1(a_i)$	89
Tabelle 4-5	A-priori-Wahscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ und bedingte Gewinne bzw. Verlust der Aktionen a_i in Mio DM	114
Tabelle 4-6	A-priori-Erwartungswerte der Aktionen a_i in Mio DM	115
Tabelle 4-7	Geschätzte Likelihoods der möglichen Testergebnisse $W(z_i/s_j)$	117
Tabelle 4-8	Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände s_j und die Testergebnisse z_i	118
Tabelle 4-9	A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für alle Umweltzustände s_j bei Berücksichtigung aller möglichen Testergebnisse z_i	118
Tabelle 4-10	Bedingte A-posteriori-Erwartungswerte der Aktion a_1 - $E_1(a_1/z_i)$	119
Tabelle 4- 11	Berechnung des Erwartungswertes der Information E(I)	120
Tabelle 5-1	Ausschußanteile Θ_i; A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(\Theta_i)$; bedingte Kosten $k(a_i, \Theta_i)$ und Verluste $l(a_i, \Theta_i)$ und Erwartungswerte der Aktionen a_1 (=keine vorherige Einstellung) und a_2 (=Einstellung)	149
Tabelle 5-2	A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(\Theta_i/x_i)$ der ersten Entscheidungsstufe und Erwartungswerte $E_1(a_i)$ der Aktionen a_1 und a_2 für die möglichen Ergebnisse e und d der ersten Stichprobe	151
Tabelle 5-3	A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_2(\Theta_i/x_i)$ der zweiten Entscheidungsstufe und Erwartungswerte $E_2(a_i)$ der Aktionen a_1 und a_2 für die möglichen Ergebnisse ee und ed der zweiten Stichprobe	153
Tabelle 5-4	Berechnung des auf der vierten Entscheidungsstufe zu erwartenden Ausschußanteils $E_4(\Theta)$ bei vorheriger Beobachtung von zwei einwandfreien und zwei defekten Probestücken	158
Tabelle 5-5	Berechnung der erwarteten Stichprobenkosten E(IK)	165
Tabelle 6-1	Mögliche Absatzniveaus; geschätzte A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten	181

Tabelle 6-2	Anschaffungskosten und durchschnittliche jährliche Zahlungsüberschüsse der Anlagen A und B	182
Tabelle 6-3	Nettogegenwartswerte der mit den einzelnen Investitionsentscheidungen verbundenen Zahlungsüberschußreihen bei alternativen Absatzniveaus (H=hoch, M=mittel, N=niedrig) und einem internen Zinsfuß von 10%	183
Tabelle 6-4	Verteilung der erfolgreichen und nicht erfolgreichen Unternehmen in Abhängigkeit zu ihrem Verschuldungsgrad V_i	192
Tabelle 7-1	Zuordnung numerischer Werte zu Wahrscheinlichkeitsausdrücken	203
Tabelle 7-2	Ableitung von Nutzenwerten unterschiedlich sicherer Geldbeträge	210

VERZEICHNIS DER ABBILDUNGEN

Abbildung 2-1	Darstellung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit anhand eines Venn'schen Diagramms	7
Abbildung 2-2	Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten einwandfreier Blitzlichtbirnen	10
Abbildung 2-3	Schematische Darstellung einer Likelihoodfunktion	14
Abbildung 3-1	Veranschaulichung eines homograden Konfidenzintervalls für Θ	35
Abbildung 3-2	Die Fehlerzahl M als Zufallsvariable	42
Abbildung 3-3	Die Informationsquellen des Prüfers	52
Abbildung 3-4	A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei subjektiven und gleichverteilten A-priori-Wahrscheinlichkeiten für $x = 2$	60
Abbildung 3-5	A-priori-Verteilungsfunktionen bei Variation der subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$	65
Abbildung 3-6	A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei Variation der subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$ und $x = 2$	65
Abbildung 3-7	A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei Variation des Stichprobenergebnisses x_j und $n = 100$	71
Abbildung 3-8	A-posteriori Verteilungsfunktionen bei Variation des Stichprobenumfangs n und einem Stichprobenergebnis von $x = 2$	73
Abbildung 4-1	Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung als Normalverteilung $f_N(p; E_o(P), \sigma_o^2(P))$	94
Abbildung 4-2	Erlösfunktionen $e(a_i, p)$ und Break-even-Punkt p_c	97
Abbildung 4-3	Verlustfunktionen $l(a_i, p)$ der Aktionen a_1 und a_2	98
Abbildung 4-4	Verlustfunktionen $l(a_i, p)$ und subjektive A-priori-Normalverteilung $f_N(p; E_o(P), \sigma_o^2(P))$	99
Abbildung 4-5	Verlustfunktionen $l(a_i, p)$ und A-posteriori-Normalverteilung $f_N(p; E_1(P), \sigma_1^2(P))$	105
Abbildung 4-6	Graphische Darstellung des Informationsoptimums	111

Abbildung 4-7	Baumdiagramm zum Entscheidungsproblem der Einführung einer neuen Zigarettenmarke	123
Abbildung 4-8	Darstellung des Erwartungswertes der vollkommenen Information E(VI) für den kontinuierlichen Fall	127
Abbildung 4-9	Erwartungswert der Information, Netto-Erwartungswert der Information und Informationskosten in Abhängigkeit zu n	131
Abbildung 5-1	Darstellung der Entscheidungssequenz des Beispiels der Maschineneinstellung als Baumdiagramm	155
Abbildung 5-2	Roll-back-Analyse des Entscheidungsproblems der Maschineneinstellung anhand eines Baumdiagrammes	161
Abbildung 5-3	Mögliche A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f(\Theta)$ für den Anteil defekter Lichtmaschinen in der Lieferung	173
Abbildung 5-4	Funktionen der relevanten Kosten für die Aktionen a_i in Abhängigkeit zu Ausschußquote Θ	177
Abbildung 6-1	Roll-back-Analyse anhand des Entscheidungsbaums (Investitionsbeispiel)	185
Abbildung 7-1	Nutzenfunktionen bei unterschiedlicher Risikoneigung	211
Abbildung 7-2	Auswirkungen der unvollständigen Erfassung der Umweltzustände auf die totale Wahrscheinlichkeit	218

ABKÜRZUNGSVERZEICHNIS

a.a.O.	am angeführten Ort
Acc. Rev.	The Accounting Review
AICPA	American Institute of Certified Public Accountants
al.	andere
AMS	The Annals of Mathematical Statistics
Aufl.	Auflage
Bd.	Band
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
Diss.	Dissertation
DM	Deutsche Mark
Ed.	Edition/Editor
f.	folgende Seite
ff.	folgende Seiten
Hrsg.	Herausgeber
hrsg.	herausgegeben
Jg.	Jahrgang
JofA	The Journal of Accountancy
JoB	The Journal of Business
Jr.	Junior
Mio	Millionen
N.F.	Neue Folge
Nr.	Nummer
pp.	pages
S.	Seite
Sp.	Spalte
u.a.	unter anderem
vgl.	vergleiche
Vol.	Volume
WPg	Die Wirtschaftsprüfung
z.B	zum Beispiel
ZfB	Zeitschrift für Betriebswirtschaft
ZfbF	Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung
ZfhF	Zeitschrift für handelswissenschaftliche Forschung

1 EINFÜHRUNG

Betrachtet man das Treffen von Entscheidungen als charakteristische Aufgabe der Unternehmensführung,[1] so folgt daraus, daß die Erreichung der angestrebten unternehmenspolitischen Ziele im wesentlichen von der Güte der getroffenen Entscheidungen und von den daraus resultierenden Handlungen abhängt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß Ungewißheit über die Entwicklung der entscheidungsrelevanten Daten herrscht,[2] so daß die Unternehmensführung gezwungen ist, die Ungewißheit der zukünftigen Datenentwicklung in das Entscheidungskalkül mit einzubeziehen.

Der größte Teil der betriebswirtschaftlichen Entscheidungen der Praxis ist allerdings heute noch dadurch gekennzeichnet, daß eine explizite Berücksichtigung der Effekte der Unsicherheit nicht vorgenommen wird, sondern stattdessen die Erfahrungen und das Fingerspitzengefühl des Unternehmers unkontrolliert in den Prozeß der Entscheidungsfindung einfließen.[3]

---

1 Vgl. Erich Gutenberg: Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. 1. Bd.: Die Produktion. 18. neubearbeitete und erweiterte Aufl. Berlin · Heidelberg · New York 1972, S. 131 ff.

2 "Ungewißheit bedeutet mangelnde Kenntnis der künftigen Entwicklung." Dieter Schneider: Investition und Finanzierung. Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie. 2., verbesserte Aufl. Opladen 1971, S. 63.
Ähnlich definiert Wittmann Ungewißheit als "Mangel an Überzeugung, daß eine Situation in einer bestimmten Weise eintreffen wird." Waldemar Wittmann: Ungewißheit und Planung. In: ZfhF, N.F., 10. Jg. (1958), S. 502.

3 Vgl. John Forester: Statistical Selection of Business Strategies. Homewood (Illinois) 1968, S. 1.

Unter dem Aspekt der schnellen wirtschaftlichen Entwicklung der letzten zwei Jahrzehnte, die durch wachsende Markt- und Unternehmensverflechtungen, durch eine sich potenzierende Geschwindigkeit in der Entwicklung neuer Produkte und Herstellungsverfahren und durch ständig steigende Aufwendungen für Forschung und Entwicklung gekennzeichnet ist, erscheinen Entscheidungen über Millionenwerte oder gar den Fortbestand ganzer Unternehmen aufgrund unkontrollierter intuitiver Eingebungen wie ein Anachronismus. Zwar gestatten heute die Methoden der Unternehmensforschung und der Ökonometrie die Lösung von Entscheidungsproblemen, die bis vor kurzem nur mit dem Fingerspitzengefühl des Unternehmers zu bewältigen waren; jedoch wird die praktische Anwendung dieser Verfahren häufig dadurch in Frage gestellt, daß sie einerseits das Vorliegen von statistisch gewonnenen Wahrscheinlichkeiten voraussetzen und anderseits die persönlichen Erfahrungen und sonstige statistisch nicht meßbare Informationen unberücksichtigt lassen.

Unabhängig von den oben erwähnten Verfahren wird in der amerikanischen Literatur zur statistischen Entscheidungstheorie seit einiger Zeit eine Methode zur Lösung betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme heftig diskutiert,[1] die diese Nachteile nicht aufzuweisen scheint - die Bayessche Entscheidungslehre.[2] Diese Richtung der statistischen Entscheidungstheorie

---

1 Bahnbrechend waren hier die beiden Werke von Robert Schlaifer: Probability and Statistics for Business Decisions. New York · Toronto · London 1959; derselbe: Introduction to Statistics for Business Decisions. New York · Toronto · London 1961.

2 In der amerikanischen Literatur werden die Ausdrücke "Bayesian Statistics", "Bayesian Approach", "Bayesian Decision Theory" und "Bayesian Inference" synonym für diese Richtung der statistischen Entscheidungstheorie verwendet. Auch im deutschsprachigen Schrifttum ist die Terminologie nicht einheitlich. Hier findet man Bezeichnungen wie "Bayessche Entscheidungstheorie", "Entscheidungslehre auf Bayesscher Grundlage" und "Bayessche Entscheidungslehre". Häufig wird auch nur von Entscheidungen "unter Verwendung des Theorems von Bayes" gesprochen, obgleich der Gebrauch dieses Theorems nur ein Merkmal der Bayesschen Entscheidungslehre ist.

ist im wesentlichen dadurch gekennzeichnet, daß die ursprünglichen Vorstellungen des Entscheidenden über die entscheidungsrelevanten Daten in Form von subjektiven Wahrscheinlichkeiten in das Entscheidungskalkül eingehen. Ist der Entscheidende darüber hinaus in der Lage, durch statistische Erhebungen zusätzlich objektive Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln, werden die ursprünglichen subjektiven Wahrscheinlichkeiten nicht als überholt betrachtet, sondern mit Hilfe des Bayesschen Theorems mit den objektiven Wahrscheinlichkeiten gewichtet. Die so gewonnenen Wahrscheinlichkeiten dienen dann zur Bewertung der Aktionsmöglichkeiten, von denen der Entscheidende diejenige wählen sollte, die den höchsten Erwartungswert aufweist.

Die Bayessche Entscheidungslehre, die trotz ihres vielversprechenden Beitrags zur Überwindung der Unsicherheit beim Treffen von Entscheidungen in der europäischen Literatur nicht die Beachtung fand wie im amerikanischen Schrifttum, ist jedoch nicht unumstritten, so daß eine ausführliche Erörterung ihrer Möglichkeiten und Grenzen angebracht erscheint. Gegenstand der vorliegenden Untersuchung ist daher eine eingehende Analyse der Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre bei betriebswirtschaftlichen Entscheidungsproblemen. Dabei wird der Zweck verfolgt, einen Überblick über die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten dieser Entscheidungslehre zu geben und darüber hinaus die Verwendung dieser Verfahren in der betriebswirtschaftlichen Praxis anzuregen.

Der Gang der Untersuchung umfaßt dabei zunächst die Darstellung der Grundlagen der Bayesschen Entscheidungslehre und ihre Einordnung in das Grundmodell der Entscheidungstheorie. Daran anschließend werden verschiedene Anwendungsmöglichkeiten und Lösungsverfahren dieser Entscheidungslehre anhand von Beispielen für einzelne Unternehmensbereiche erörtert.

Die Entscheidungsprobleme der einzelnen Beispiele wurden so ausgesucht, daß sie sowohl eine jeweils für den betreffenden Bereich typische Entscheidungssituation wiedergeben, als auch die Diskussion eines neuen Aspekts der Bayesschen Entscheidungslehre ermöglichen. Eine analoge Übertragung spezieller Lösungskonzeptionen bestimmter Anwendungsbeispiele auch auf ähnlich gelagerte Entscheidungsprobleme in anderen Unternehmensbereichen ist dabei natürlich nicht ausgeschlossen. Auf diese Möglichkeit, die für die Operationalität der Bayesschen Entscheidungslehre spricht, wird allerdings nicht näher eingegangen.

Im Anschluß an die Darstellung und Diskussion der einzelnen Anwendungsbeispiele folgt eine Analyse der möglichen Kritik am Bayesschen Lösungsansatz, soweit sie sich auf die allgemeinen Grundlagen des Verfahrens bezieht. Die spezielle Lösungskonzeptionen betreffende Kritik wird dagegen jeweils bei der Diskussion der Anwendungsbeispiele berücksichtigt. Die Untersuchung endet schließlich mit einer Schlußbetrachtung, in der die Vor- und Nachteile der Bayesschen Entscheidungslehre zusammengefaßt werden.

2 DIE GRUNDLAGEN DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE

2-1 Ableitung und Darstellung des Bayesschen Theorems

Das wesentliche Merkmal der Bayesschen Entscheidungslehre, worauf auch die Benennung dieser Konzeption der statistischen Entscheidungstheorie zurückzuführen ist, ist die Verwendung des Bayesschen Theorems[1] zur Gewinnung der in das Entscheidungskalkül eingehenden Wahrscheinlichkeiten. Dieses Theorem, das von dem englischen Mathematiker und Geistlichen Thomas Bayes (1702 bis 1761) erstmalig verwendet und 1763 nach seinem Tode veröffentlicht wurde,[2] läßt sich wie folgt ableiten:[3]

---

1 Das Bayessche Theorem wird auch häufig als Bayes-Formel oder Satz von Bayes bezeichnet.

2 Thomas Bayes: An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. In: Philosophical Transactions, Vol. 53 (1763), S. 376 - 398 und S. 401 - 403; sowie Vol. 54 (1764), S. 298 - 310. Wiederabgedruckt in: Biometrika, Vol. 45 (1958), S. 296 - 315.

3 Zur Ableitung des Theorems vgl. u.a. D. V. Lindley: Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint. Part 1: Probability. Cambridge 1965, S. 19 ff. Günter Menges: Über Thomas Bayes (1702 - 1761) und das Theorem - Versuch einer Würdigung. In: Geschichte und Zukunft. Anton Hain zum 75. Geburtstag. Hrsg. von A. Diemer. Meisenheim am Glan 1967, S. 485 - 498. John G. Kemeny, Arthur Schleifer, jr., J. Laurie Snell and Gerald L. Thompson: Mathematik für die Wirtschaftspraxis. Titel der amerikanischen Originalausgabe: Finite Mathematics with Business Applications. Deutsche Übersetzung: H.-J. Zimmermann. Berlin 1966, S. 153 ff. S. Goldberg: Die Wahrscheinlichkeit. Eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Autorisierte deutsche Übersetzung: K. Wigand. Braunschweig 1964, S. 94 ff.

Es seien A_1, A_2, ..., A_i, ..., A_n sich einander paarweise ausschließende Ereignisse, die einen gegebenen Ereignisraum Ω ausfüllen, so daß folgendes gilt:

$$(2\text{-}1) \quad A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots \cup A_n = \Omega .$$

Jedes beliebige zufällige Ereignis B in Ω läßt sich nun als Vereinigung sich gegenseitig ausschließender Ereignisse darstellen:

$$(2\text{-}2) \quad B = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \ldots \cup (B \cap A_i) \cup \ldots \cup (B \cap A_n).$$

Für die Wahrscheinlichkeiten gilt dann nach dem Additionssatz für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse:[1]

$$(2\text{-}3) \quad W(B) = W(B \cap A_1) + W(B \cap A_2) + \ldots + W(B \cap A_i) + \ldots + W(B \cap A_n).$$

Für die Summanden des Ausdrucks (2-3) läßt sich jetzt der Multiplikationssatz für abhängige Ereignisse anwenden:[2]

$$(2\text{-}4) \quad W(B) = W(A_1) \cdot W(B/A_1) + W(A_2) \cdot W(B/A_2) + \ldots + W(A_i) \cdot W(B/A_i) + \ldots + W(A_n) \cdot W(B/A_n).$$

oder kürzer:

$$(2\text{-}4a) \quad W(B) = \sum_{j=1}^{n} W(A_i) \cdot W(B/A_i).$$

Der Ausdruck (2-4) wird auch als Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit bezeichnet,[3] der anhand der folgenden Abbildung 2-1 veranschaulicht werden soll.

---

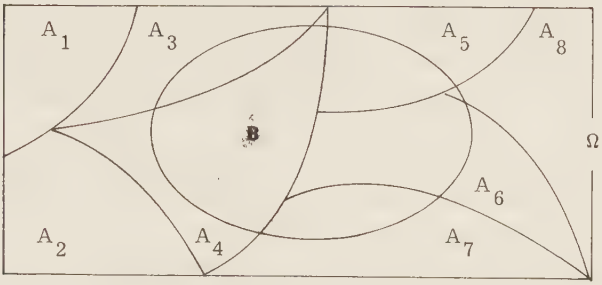
1 Der Additionssatz für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse lautet für die beiden Ereignisse A und B: $W(A \cup B) = W(A) + W(B)$.

2 Der Multiplikationssatz für zwei von einander abhängige Ereignisse A und B lautet: $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B/A) = W(B) \cdot W(A/B)$.

3 Vgl. Günter Menges: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Köln und Opladen 1968, S. 109.

Abbildung 2-1

Darstellung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit anhand eines Vennschen Diagramms



Neben dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit spielt bei der Ableitung des Bayesschen Theorems noch der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eine Rolle. Darunter versteht man die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis A unter der Voraussetzung, daß ein anderes Ereignis B vorher bereits eingetreten ist. Die bedingte Wahrscheinlichkeit ist folgendermaßen definiert:

$$(2\text{-}5) \qquad W(A/B) = \frac{W(A \cap B)}{W(B)} \quad ; \text{ wenn } W(B) > 0.$$

Betrachtet man jetzt nicht ein Ereignis A, sondern ein beliebiges Ereignis A_i aus den n Ereignissen $A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots, A_n$, läßt sich die bedingte Wahrscheinlichkeit für ein Ereignis A_i unter Anwendung des Multiplikationssatzes für abhängige Ereignisse wie folgt schreiben:

$$(2\text{-}6) \qquad W(A_i/B) = \frac{W(A_i) \cdot W(B/A_i)}{W(B)} \quad .$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B im Nenner des Ausdrucks (2-6) läßt sich auch durch die totale Wahrscheinlichkeit in der Form (2-4a) ausdrücken:

$$(2\text{-}7) \qquad W(A_i/B) = \frac{W(A_i) \cdot W(B/A_i)}{\sum_{j=1}^{n} W(A_j) \cdot W(B/A_j)} \quad .$$

Der Ausdruck der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Form (2-7) ist nun das sogenannte Bayessche Theorem. Verbal erläutert: Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines beliebigen Ereignisses A_i unter der Voraussetzung, daß vorher bereits das Ereignis B eingetreten ist, ist gleich dem Verhältnis der gemeinsamen Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse A und B zur Summe dieser gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten.

Im folgenden sollen die Voraussetzungen, unter denen das Bayessche Theorem gilt, zusammengefaßt werden:

(1) Die Summe der Ereignisse A_i muß den Ereignisraum Ω vollständig ausfüllen: $\sum_{j=1}^{n} A_i = \Omega$.

(2) Die Ereignisse A_i müssen einander paarweise ausschließen: $A_i \cdot A_j = \emptyset$.

(3) Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Ereignis A_i muß größer als Null sein: $W(A_i) > 0$.

(4) Die Wahrscheinlichkeit für das beliebige Ereignis B muß größer als Null sein: $W(B) > 0$.

(5) Keines der einzelnen Ereignisse A_i darf dem anderen gleich sein: $i \neq j$.

Die Bedeutung des Bayesschen Theorems liegt darin, daß man mit seiner Hilfe die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen kann, daß gleichzeitig mit dem Ereignis B das Ereignis A_i eintritt, wenn vorher das Ereignis B, das nur mit einem oder mehreren der Ereignisse A_i gemeinsam auftreten kann, beobachtet worden ist. Das folgende Beispiel möge zur Veranschaulichung der allgemeinen Anwendung des Bayesschen Theorems dienen:

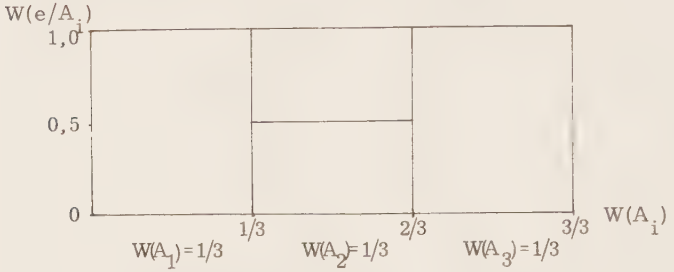
Ein Fotoamateur möge drei äußerlich gleiche Schachteln mit Blitzlichtbirnen besitzen, von denen die Schachtel A_1 zwei einwandfreie, die Schachtel A_2 eine einwandfreie und eine defekte und die Schachtel A_3 zwei defekte Birnen enthält. Der Fotoamateur entnimmt nun einer zufällig ausgewählten Schachtel eine Birne, die sich als einwandfrei (e) erweist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann er damit rechnen, daß ihm mit der zweiten Birne dieser Schachtel ebenfalls ein Foto gelingt; oder anders, daß er die Schachtel A_1 ausgewählt hat - $W(A_1/e)$ -?

Zur Beantwortung dieser Frage ist zunächst festzuhalten, daß die Wahrscheinlichkeit, die Schachtel A_1 ohne vorherige Entnahme einer Birne genommen zu haben, ein Drittel beträgt - $W(A_1) = \frac{1}{3}$ -, weil die Schachtel, die sich von den anderen durch nichts unterscheidet, zufällig ausgewählt wurde. Das gleiche gilt für die beiden anderen Schachteln A_2 und A_3, so daß: $W(A_1) = W(A_2) = W(A_3) = \frac{1}{3}$. Weiterhin ist die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen, eine einwandfreie Birne erhalten zu haben, wenn sie jeweils aus der Schachtel A_1, A_2 oder A_3 stammt. Bei der Schachtel A_1, die nur einwandfreie Birnen enthält, ist diese Wahrscheinlichkeit offensichtlich gleich eins - $W(e/A_1) = 1$ -. Für die Schachtel A_2 mit einer defekten und einer einwandfreien Birne beträgt die bedingte Wahrscheinlichkeit dann 0,5 - $W(e/A_2) = 0,5$ -; bei der Schachtel A_3 schließlich ist es gar nicht möglich eine einwandfreie Birne zu ziehen, so daß hier die bedingte Wahrscheinlichkeit gleich Null ist - $W(e/A_3) = 0$ -. Die Bestimmung der obigen Wahrscheinlichkeiten läßt sich auch aus der folgenden Abbildung 2-2 ersehen.

Abbildung 2-2

Graphische Darstellung der Wahrscheinlichkeiten

für das Auftreten einwandfreier Blitzlichtbirnen



Zur Berechnung der gesuchten Wahrscheinlichkeit $W(A_1/e)$ benutzt man jetzt das Bayessche Theorem in der Form (2-7) und setzt die numerischen Werte der Wahrscheinlichkeiten $W(A_i)$ und $W(e/A_i)$ ein.[1]

$$(2\text{-}7a) \qquad W(A_1/e) = \frac{W(A_1) \cdot W(e/A_1)}{W(A_1) \cdot W(e/A_1) + W(A_2) \cdot W(e/A_2) + W(A_3) \cdot W(e/A_3)} .$$

$$(2\text{-}7b) \qquad W(A_1/e) = \frac{\frac{1}{3} \cdot 1}{\frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot 0} = \frac{2}{3} .$$

Die Wahrscheinlichkeit, die Schachtel A_1 ausgewählt zu haben, beträgt jetzt, nachdem man das Ereignis e beobachtet hat, zwei Drittel; gegenüber der ursprünglichen Wahrscheinlichkeit ohne diese Beobachtung hat sie sich also verdoppelt.

---

1 Will man mit Hilfe des Bayesschen Theorems die Wahrscheinlichkeit für alle Ereignisse A_i unter der Voraussetzung eines bereits beobachteten Ereignisses B bestimmen, empfiehlt es sich bei Vorliegen mehrerer Ereignisse A_i jeweils die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $W(A_i) \cdot W(B/A_i)$ zu ermitteln, diese dann aufzusummieren und anschließend jeden Summanden durch die Summe zu dividieren.
Für das obige Beispiel ist die Vorgehensweise wie folgt:

$W(A_1) \cdot W(e/A_1) = 1/3 \cdot 1 = 1/3;$	$W(A_1/e) = 1/3 : 1/2 = 2/3;$	
$W(A_2) \cdot W(e/A_2) = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6;$	$W(A_2/e) = 1/6 : 1/2 = 1/3;$	
$W(A_3) \cdot W(e/A_3) = 1/3 \cdot 0 = 0.$	$W(A_3/e) = 0 : 1/2 = 0.$	
$1/2$		$3/3$

Die bisher diskutierte Form des Bayesschen Theorems bezieht sich auf zufällige Ereignisse. Ohne Schwierigkeiten läßt sich das Theorem aber auch für Zufallsvariable[1] sowohl in diskreter, als auch in kontinuierlicher Ausprägung formulieren.[2]

Für den diskreten Fall habe die Zufallsvariable X die Ausprägungen x_k (k = 1, 2, ..., n), deren Wahrscheinlichkeit von dem Parameter Q, der selber wieder eine Zufallsvariable mit den Ausprägungen q_i (i = 1, 2, ..., n) ist, abhängt. Das Bayessche Theorem schreibt sich dann folgendermaßen:

$$(2\text{-}8) \quad W(Q = q_i/X = x_k) = \frac{W(Q = q_i) \cdot W(X = x_k/Q = q_i)}{\sum_{i=1}^{n} W(Q = q_i) \cdot W(X = x_k/Q = q_i)} .$$

Im kontinuierlichen Fall sei X eine diskrete Zufallsvariable und Q eine stetig verteilte Zufallsvariable mit einer Dichtefunktion[3] f(q) für den Bereich von q_o bis q_1. Das Bayessche Theorem nimmt dann die folgende Form an:

$$(2\text{-}9) \quad W(q/X = x_k) = \frac{f(q) \cdot W(X = x_k/Q = q)}{\int_{q_o}^{q_1} f(q) \cdot W(X = x_k/Q = q) \cdot dq} .$$

---

1 Eine Zufallsvariable X ist eine reelle Funktion über dem Ereignisraum Ω. Sie ordnet jedem Elementarereignis ω_i aus Ω einen bestimmten Wert x_j zu. Besonderes Kennzeichen einer Zufallsvariablen ist, daß bei der Durchführung eines Zufallsexperiments der Zufall bestimmt, welchen bestimmten Wert x_j die Zufallsvariable annimmt. Damit lassen sich den möglichen Funktionswerten der Zufallsvariablen nur Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Enthält der Ereignisraum, über dem die Zufallsvariable definiert ist, eine endliche Zahl von Elementen, spricht man von einer diskreten Zufallsvariablen. Besteht dagegen der zugrunde liegende Ereignisraum aus unendlich vielen Elementen, bezeichnet man die Zufallsvariable als kontinuierlich oder stetig. Vgl. dazu u.a. Josef Bleymüller: Hilfsblätter zur Vorlesung Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler I. Münster Wintersemester 1971/72, S. 123 f.

2 Vgl. Karl Weber: Entscheidungsprozesse unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: Entscheidungen bei unsicheren Erwartungen. Beiträge zur Theorie der Unternehmung. Hrsg. von H. Hax. Opladen 1971, S. 69 - 99, hier S. 71 f.

3 Als Dichtefunktion bezeichnet man die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen.

Schließlich sei noch der Fall erwähnt, in dem die Zufallsvariable X für jeden Wert q_i des Parameters Q, der eine diskrete Zufallsvariable sei, die Dichte $f(x/Q = q_i)$ aufweist. In diesem Fall lautet das Bayessche Theorem wie folgt:

$$(2\text{-}10) \qquad W(Q = q_i/X = x) = \frac{W(Q = q_i) \cdot f(x/Q = q_i)}{\sum_{j=1}^{n} W(Q = q_j) \cdot f(x/Q = q_j)} \; .$$

Die hier aufgezeigten Möglichkeiten des Einsetzens von kontinuierlichen und / oder diskreten Zufallsvariablen in das Bayessche Theorem bedeuten einen wesentlichen Vorteil für die Anwendung des Theorems bei Entscheidungsproblemen, wie im folgenden noch zu zeigen sein wird.

2-2 Die Wahrscheinlichkeitsbegriffe der Bayesschen Entscheidungslehre

Wie im vergangenen Abschnitt gezeigt wurde, stellt das Hauptmerkmal der Bayesschen Entscheidungslehre, das Bayessche Theorem, nichts anderes als eine spezielle Form der bedingten Wahrscheinlichkeit dar. Es erhebt sich nun die Frage, wie dieses im Grunde sehr einfache Theorem zur Grundlage einer neuen Richtung der statistischen Entscheidungstheorie werden konnte. Die Anwort hierauf ist in der Interpretationsweise der in das Theorem eingehenden Wahrscheinlichkeiten zu suchen. Zur näheren Analyse dieser Wahrscheinlichkeiten sollen diese erst einmal aufgezählt und terminologisch bestimmt werden:

(1) Die mit Hilfe des Bayesschen Theorems zu berechnende Wahrscheinlichkeit - $W(A_i/B)$ -, bezeichnet man als A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, weil sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A_i angibt, nachdem bereits das Ereignis B eingetreten ist.

(2) Dagegen nennt man die unbedingten Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten der einzelnen Ereignisse A_i - $W(A_i)$ - A-priori-Wahrscheinlichkeiten; sie müssen bekannt sein, bevor sich das Ereignis B zugetragen hat.

(3) Die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Ereignis B unter der Voraussetzung, daß eins der Ereignisse A_i vorliegt - $W(B/A_i)$ -, stellen die Likelihoods dar, wobei die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B als eine Funktion der Ereignisse A_i betrachtet wird. Dies ist darauf zurückzuführen, daß das Ereignis B nur in Verbindung mit einem oder mehreren der Ereignisse A_i auftreten kann. Damit ist die Wahrscheinlichkeit, das Ereignis B beobachtet zu haben, abhängig davon, welches der Ereignisse A_i zusammen mit dem Ereignis B eingetreten ist.[1] Zur Veranschaulichung der graphischen Gestalt einer Likelihoodfunktion dient die folgende Abbildung 2-3.

(4) Die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten im Zähler des Bayesschen Theorems - $W(A_i) \cdot W(B/A_i)$ - stellen die Wahrscheinlichkeit dafür dar, daß sowohl ein Ereignis A_i als auch das Ereignis B eintritt. Man kann den Zähler des Theorems auch als die mit den Likelihoods gewichteten A-priori-Wahrscheinlichkeiten ansehen. Bis auf die Tatsache, daß in einigen Fällen diese gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten direkt vorgegeben sind, kommt ihnen keine weitere Bedeutung zu.

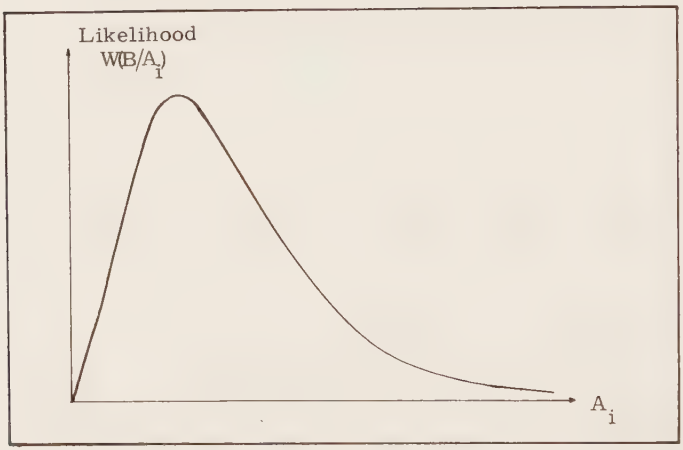
---

1 Der Ausdruck "Likelihood" ist auf Ronald A. Fisher: Statistical Methods for Research Workers. 13th ed., New York 1958 (1st ed., Edinburgh and London 1925) zurückzuführen. "R. A. Fisher hat mit voller Absicht die Bezeichnung probability (Wahrscheinlichkeit) vermieden und spricht von Likelihood, weil er den Begriff des Probability für Maße über dem Ereignisraum reserviert. Die Likelihood ... ist hingegen ein (Ungewißheits-) Maß über dem Parameterraum." Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 283. Zum Likelihoodmodell vgl. ebenda S. 279 - 283. Eine gute Darstellung des Likelihoodprinzips in Verbindung mit dem Bayesschen Theorem ist zu finden bei Leonard J. Savage: Subjective Probability and Statistical Practice. In: The Foundations of Statistical Inference. A Discussion opened by L. J. Savage at a meeting of the Joint Statistics Seminar, Birkbeck and Imperial Colleges in the University of London. General ed.: M. S. Bartlett. London · New York 1962, S. 9 - 35.

(5) Die totale Wahrscheinlichkeit des Ereignisses B im Nenner des Theorems wurde bereits erörtert.[1] Zu bemerken ist vielleicht, daß die totale Wahrscheinlichkeit immer weitaus kleiner als eins ist, weil nur ein beliebiges Ereignis B und nicht alle möglichen Ereignisse B_j, die zusammen mit den Ereignissen A_i auftreten können, betrachtet wird.

Abbildung 2-3

Schematische Darstellung einer Likelihoodfunktion



Prinzipiell ist das Bayessche Theorem nun unabhängig davon gültig, welcher Wahrscheinlichkeitsinterpretation man sich bedient, vorausgesetzt, die Wahrscheinlichkeiten erfüllen ein gegebenes Axiomensystem. Man unterscheidet neben einer Fülle von Wahrscheinlichkeitsbegriffen[2] im wesentlichen folgende Definitionen:[3]

---

1 Vgl. Abschnitt 2-1.

2 Eine ausführliche Aufzählung möglicher Wahrscheinlichkeitsbegriffe findet man bei Peter C. Fishburn: Decision and Value Theory. New York · London · Sydney 1964, S. 134.

3 Zu den Definitionen der Wahrscheinlichkeit vgl. u.a. Josef Bleymüller: Statistik ..., a.a.O., S. 93 ff. Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 28 ff.

(1) Die klassische oder logische Wahrscheinlichkeitsdefinition, nach der die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A bei einem Zufallsexperiment[1] gleich ist dem Verhältnis aus der Anzahl der günstigen Fälle und der Anzahl der gleichmöglichen Fälle:

$$W(A) = \frac{\text{Zahl der günstigen Fälle}}{\text{Zahl der gleichmöglichen Fälle}} .$$

(2) Die statistische oder Limes-Definition der Wahrscheinlichkeit, unter der man bei einem Zufallsexperiment mit einer Folge von n unabhängigen Versuchen die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Ereignisses A den Grenzwert für dessen relative Häufigkeit versteht:

$$W(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{h_n(A)}{n} .$$

(3) Die subjektive Definition, nach der alle Wahrscheinlichkeiten letztlich nur den Grad der Überzeugung einer Person hinsichtlich des Eintritts eines beliebigen Ereignisses A wiedergeben.[2]

Die Wahrscheinlichkeiten der Definitionen (1) und (2) werden auch als objektive Wahrscheinlichkeiten bezeichnet, die von der klassischen statistischen Entscheidungstheorie als allein zulässig erachtet werden. Wendet man nun ausschließlich objektive Wahrscheinlichkeiten beim Gebrauch des Bayesschen Theorems an, so sind die A-priori-Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe der klassischen Wahrscheinlichkeitsdefinition festzusetzen. Da diese sich aber bis auf wenige Ausnahmen[3] selten ermitteln lassen, sind der Anwendung

---

1 Ein Zufallsexperiment ist ein beliebig oft wiederholbarer, nach bestimmten Vorschriften ablaufender Vorgang, dessen Ergebnis vom Zufall abhängt. Vgl. Josef Bleymüller: Statistik ..., a.a.O., S. 91 f.

2 Eine weitere Erörterung der subjektiven Wahrscheinlichkeit ist hier nicht vorgesehen, sondern erfolgt in Abschnitt 7-1.

3 Ausnahmen sind u.a. Glücksspielsituationen, Fälle aus den Naturwissenschaften und der Technik. Vgl. auch das Beispiel zur Bestimmung einwandfreier Stücke im Ausschuß in Abschnitt 5-2.

des Bayesschen Theorems in der statistischen Entscheidungstheorie enge Grenzen gesetzt.[1]

Die Bayessche Entscheidungslehre hingegen läßt den Ansatz von subjektiven Wahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten zu. Ob Bayes mit seiner Wahrscheinlichkeitsdefinition[2] ausdrücklich der Wahrscheinlichkeit eine subjektivistische Interpretation geben wollte, wie vielfach behauptet wird, läßt sich heute nicht mehr klären, ist aber für den Fortgang der Untersuchung auch ohne Bedeutung.[3] Festzuhalten bleibt, daß das Bayessche Theorem erst durch die mögliche Interpretation der Wahrscheinlichkeit als

---

1 Wie sehr die Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten auf subjektiver Grundlage von den Vertretern der klassischen statistischen Entscheidungstheorie abgelehnt wird, soll folgende Bemerkung zeigen: "Die subjektive Bestimmung der A-priori-Verteilung ... ist die problematischste ... . Würden wir den Wahrscheinlichkeitssubjektivisten folgen, dann wäre das Buch hier zu Ende." Günter Menges: Grundmodelle wirtschaftlicher Entscheidungen. Einführung in moderne Entscheidungstheorien unter besonderer Berücksichtigung volks- und betriebswirtschaftlicher Anwendungen. Köln und Opladen 1969, S. 192.

2 "The probability of any event is the ratio between the value at which an expectation depending on the happening of the event ought to be computed, and the value of the thing expected upon it's happening." Thomas Bayes: An Essay ..., a. a. O., S. 298.

3 Zur Frage der Interpretation der Gedanken von Thomas Bayes vgl. Günter Menges: Über Thomas Bayes ..., a. a. O.

subjektive Wahrscheinlichkeit seine entscheidungstheoretische Relevanz erhält. Diese liegt darin begründet, daß man die zumeist subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten[1] mit den fast immer objektiven Likelihoods[2], die häufig durch eine Stichprobenuntersuchung gewonnen werden, gewichtet und über das Bayessche Theorem die "objektivierten" A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ermittelt. Man betrachtet also die subjektiv gewonnenen A-priori-Wahrscheinlichkeiten nicht im Anschluß an eine Zusatzuntersuchung als vollständig überholt, sondern berücksichtigt sie weiterhin.[3] Ist jedoch die Möglichkeit zur Beschaffung zusätzlicher Informationen nicht gegeben, verzichtet man bei Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre gänzlich auf objektive Wahrscheinlichkeiten und läßt eine allein subjektive Beurteilung der entscheidungsrelevanten Ereignisse zu.[4]

---

1 Bei Vorliegen objektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten verwendet man im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre auch diese zur Bestimmung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten.

2 Sind die Ergebnisse der Zusatzuntersuchungen nicht als objektive Wahrscheinlichkeiten (Likelihoods) zu bestimmen, können diese auch subjektiv geschätzt werden. Vgl. dazu das Beispiel zur Einführung einer neuen Zigarettenmarke in Abschnitt 4-3.

3 Vgl. Karl Weber: Projektanalyse unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: Die Unternehmung. Schweizerische Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 23. Jg. (1969), S. 1 - 20, hier: S. 5. derselbe: Entscheidungsprozesse..., a.a.O., S. 72. Weber spricht in diesem Zusammenhang von "Erkenntnismischung".

4 Vgl. Paul E. Green: Some intra-firm Applications of Bayesian Decision Theory to Problems in Business Planning. Dissertation in Economics. University of Pennsylvania 1962. Vgl. auch das Investitionsbeispiel in Abschnitt 6-1.

2-3 Der Erwartungswert als Bayessches Entscheidungskriterium

Als dritte Grundlage der Bayesschen Entscheidungslehre ist neben der Verwendung des Bayesschen Theorems und subjektiver Wahrscheinlichkeiten der Erwartungswert als Entscheidungskriterium anzusehen, aufgrund dessen der Entscheidende die Vorteilhaftigkeit der ihm zur Auswahl stehenden Aktionen beurteilen kann.

Generell kennzeichnet der Erwartungswert (oder auch synonym: Mittelwert) neben der Varianz als Streuungsmaß die Häufigkeitsverteilung einer Zufallsvariablen. Immer wenn eine Zufallsvariable zwei oder mehr numerische Werte annehmen kann, läßt sich der Erwartungswert dadurch berechnen, daß man jeden möglichen Wert der Variablen mit der Wahrscheinlichkeit (=relative Häufigkeit) seines Eintreffens multipliziert und dann die Summe daraus bildet.[1] Eine diskrete Zufallsvariable mit den Ausprägungen $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$, die die Wahrscheinlichkeiten $W(x_1), W(x_2), \ldots, W(x_i), \ldots, W(x_n)$ annehmen, hat dann den folgenden Erwartungswert:

$$(2\text{-}11) \quad E(X) = W(x_1) \cdot x_1 + W(x_2) \cdot x_2 + \ldots + W(x_i) \cdot x_i + \ldots + W(x_n) \cdot x_n .$$

oder unter Verwendung des Summenzeichens:

$$(2\text{-}11a) \quad E(X) = \sum_{i=1}^{n} W(x_i) \cdot x_i .$$

Für den Fall einer kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen mit der Dichtefunktion $f(x)$ im Bereich x_o bis x_1 lautet der Erwartungswert:

$$(2\text{-}12) \quad E(X) = \int_{x_o}^{x_1} x \cdot f(x) \cdot dx .$$

---

1 Zum Erwartungswert vgl. u.a. Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 212 ff. John G. Kemeny et al.: Mathematik ..., a.a.O., S. 188 ff.

Der Erwartungswert ist nun keineswegs der Wert, der unbedingt bei der Durchführung eines einzigen Zufallsexperiments auftritt, sondern vielmehr der Wert, den man bei häufiger Wiederholung des gleichen Experiments im Durchschnitt erwarten darf. Auch entspricht er in vielen Fällen nicht einem der möglichen Ergebnisse des Experiments.

Zur Anwendung des Erwartungswertes als Entscheidungskriterium wird im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre vorausgesetzt, daß der Entscheidende seinen möglichen Aktionen, deren Ergebnisse wegen der Unsicherheit der zukünftigen Datenentwicklung zufallsabhängig sind, einen numerischen Nutzen beimessen kann. Damit wird der Nutzen als Zufallsvariable betrachtet, für dessen einzelne Ausprägungen Wahrscheinlichkeiten bestimmbar sind. Das Bayessche Entscheidungskriterium lautet dann:[1]

> Wähle die Aktion, deren Erwartungswert des Nutzens ein Maximum wird!

Da häufig auch anstelle des Nutzens Verlustgrößen bei der Beurteilung der Konsequenzen der Aktionen eine Rolle spielen, läßt sich das obige Entscheidungskriterium auch folgendermaßen formulieren:

> Wähle die Aktion, deren erwarteter Verlust ein Minimum wird!

In den meisten Fällen ist die quantitative Ermittlung von numerischen Nutzenwerten außerordentlich problematisch, so daß bei ökonomischen Entscheidungsproblemen vielfach der Nutzen einer Aktion ihren monetären Konsequenzen gleichgesetzt wird. Die Problematik dieser Vorgehensweise und der Wahl des Erwartungswertes als Entscheidungskriterium soll jedoch nicht hier erörtert werden, sondern Gegenstand späterer Abschnitte sein.[2]

---

1 Vgl. hierzu auch Günter Menges: Grundmodelle ..., a.a.O., S. 180.

2 Vgl. die Abschnitte 7-2 und 7-3.

2-4 Die Einordnung der Bayesschen Entscheidungslehre in das allgemeine Grundmodell der Entscheidungstheorie

Soweit es sich vermeiden ließ, wurden die Instrumente der Bayesschen Entscheidungslehre bisher ohne Bezug auf das allgemeine Grundmodell der Entscheidungstheorie abgehandelt, um im Anschluß daran die entscheidungstheoretische Konzeption im Rahmen des Entscheidungsmodells geschlossen darzustellen. Dazu ist zunächst eine kurze Skizzierung des allgemeinen Grundmodells angebracht, auf das sich letztlich alle Entscheidungsprobleme zurückführen lassen.[1] In dieses Modell gehen die folgenden Daten ein:

(1) Der Entscheidende
Unter diesem Begriff kann man sowohl eine Einzelperson als auch eine Gruppe von Personen oder auch eine juristische Person verstehen. Allgemein werden bei dem Entscheidenden rationales Handeln und logisches Denken vorausgesetzt.

(2) Die Aktionen des Entscheidenden[2]
Das sind sämtliche Handlungsalternativen, die dem Entscheidenden zur Auswahl stehen. Bei realen Entscheidungsproblemen ist eine vollständige Erfassung

---

1 Vgl. u.a. Hans Bühlmann, Hans Loeffel und Erwin Nievergelt: Einführung in die Theorie und Praxis der Entscheidung bei Unsicherheit. Bd. 1 der Reihe "Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics". Ed. by M. Beckmann und H. P. Künzi. Berlin · Heidelberg · New York 1967, S. 1 ff. Günter Menges: Grundmodelle ..., a.a.O., S. 82 ff. Howard Raiffa and Robert Schlaifer: Applied Statistical Decision Theory. Boston 1961, S. 3 ff.

2 Diese bezeichnet man auch als Handlungsmöglichkeiten oder -alternativen.

aller Aktionen häufig unmöglich.[1] Die Summe aller Aktionen bildet den Aktionsraum:

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n\}.$$

(3) Die Umweltzustände[2]

Die Konsequenzen der einzelnen Aktionen hängen davon ab, welcher der möglichen Umweltzustände, deren Eintreffen nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden kann, sich ergibt. Bei betriebswirtschaftlichen Entscheidungen äußert sich die Umwelt in Datenkonstellationen wie z.B. Zahl der Konkurrenten am Markt, Verhalten der Nachfrager, volkswirtschaftliche Situation oder Technologie. Sämtliche Umweltzustände, deren vollständige Berücksichtigung ähnlich problematisch ist wie die aller Aktionen,[3] stellen den Zustandsraum dar:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_j, \ldots, s_m\}.$$

---

1 Das hat zur Folge, daß eine optimale Lösung einer lediglich zufriedenstellenden Lösung eines Entscheidungsproblems weichen muß. Vielfach ist es auch angebracht, zunächst eine Reihe von möglichen und betrachtenswerten Aktionen rein intuitiv aufzuzählen und erst, nachdem eine Anzahl begründeter Aktionen definiert ist, mit der formalen Analyse des Entscheidungsproblems zu beginnen. Vgl. Howard Raiffa and Robert Schlaifer: Decision Theory ..., a. a. O., S. VIII.

2 Hierfür findet man auch die folgenden Ausdrücke: Welt, Natur, Realität oder Umweltkonstellationen.

3 Auf dieses Problem wird in Abschnitt 7-4 noch näher eingegangen.

(4) Die Wahrscheinlichkeiten

In der Risikosituation[1] kann der Entscheidende den möglichen Umweltzuständen objektive Wahrscheinlichkeiten zuordnen, mit denen er die Konsequenzen einer Entscheidung gewichten kann. Die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten füllt den Wahrscheinlichkeitsraum vollständig aus, so daß folgendes gilt:

$$\sum_{j=1}^{m} W(s_j) = 1.$$

(5) Die Informationen

Dem Entscheidenden wird die Möglichkeit eingeräumt, gegebenenfalls Informationen - vielfach in Form einer Stichprobe - über die Umweltzustände einzuholen. Diese bilden den Vorhersagebereich:

$$Z = \left\{ z_1, z_2, \ldots, z_k, \ldots, z_n \right\}.$$

(6) Die bedingten Ergebnisse

Aus dem Zusammentreffen einer Aktion a_i mit einem Umweltzustand s_j folgt ein Ergebnis, das deshalb bedingt ist, weil es für die betreffende Aktion nur gültig ist, wenn s_j eintrifft. Dieser Kombination kann der Entscheidende entweder Nutzen- oder Geldwerte (Payoffs) zuordnen. Somit lassen sich die Ergebnisse einer Entscheidung als Funktion der möglichen Aktionen und Umweltzustände sehen:

$$e(a_i, s_j) = e_{ij} = f(a_i, s_j).$$

---

1 In der Literatur zur Entscheidungstheorie ist eine Einteilung der Entscheidungen nach dem zugrunde liegenden Informationsgrad in Entscheidungen unter Sicherheit, unter Risiko und unter Unsicherheit üblich. Dieser Unterteilung, die sicherlich für die theoretische Analyse von Entscheidungsproblemen nutzbringend ist, wird in dieser Untersuchung jedoch nicht gefolgt, weil die Grenzen zwischen Risiko (Es existieren objektive Wahrscheinlichkeiten.) und Unsicherheit (Eine Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten ist nicht möglich.) fließend sind, so daß keine der beiden Arten in praxi in reiner Form vorkommt. Entscheidungen unter Sicherheit dagegen dürfte es kaum geben. Vgl. dazu auch Hans Schneeweiß: Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin · Heidelberg · New York 1967, S. 27 ff.

(7) Die Ergebnismatrix

Häufig läßt sich das allgemeine Entscheidungsmodell in Form einer Ergebnis- oder Payoff-Matrix der folgenden Art zusammenfassen.

Tabelle 2-1

Ergebnismatrix zum allgemeinen Entscheidungsmodell

$W(s_j)$	$W(s_1)$	$W(s_2)$	...	$W(s_j)$	...	$W(s_m)$
a_i \ s_j	s_1	s_2	...	s_j	...	s_m
a_1	e_{11}	e_{12}	...	e_{1j}	...	e_{1m}
a_2	e_{21}	e_{22}	...	e_{2j}	...	e_{2m}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
a_i	e_{i1}	e_{i2}	...	e_{ij}	...	e_{im}
⋮	⋮	⋮	⋱	⋮	⋱	⋮
a_n	e_{n1}	e_{n2}	...	e_{nj}	...	e_{nm}

(8) Das Entscheidungskriterium

Um eine seinen Präferenzvorstellungen entsprechende Auswahl unter den möglichen Aktionen vornehmen zu können, benötigt der Entscheidende ein Kriterium oder eine Regel, die ihm die optimale Erfüllung seiner Zielsetzung[1] gewährleistet.

---

1 In dieser Untersuchung soll Gewinnmaximierung als vorgegebenes Ziel des Entscheidenden unterstellt werden. Zwar lassen sich in der Realität Abweichungen beobachten, die jedoch auf institutionelle oder psychologische Umstände zurückzuführen sind und denen keine Beachtung zu schenken ist. Vgl. auch Edmund Heinen: Die Zielfunktion der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg. Hrsg. von H. Koch. Wiesbaden 1962, S. 9 ff.

Die Bayessche Entscheidungslehre ist nun in das Grundmodell der Entscheidungstheorie wie folgt einzubauen:

Dem Entscheidenden stehen mindestens zwei Aktionen zur Auswahl,[1] deren Ergebnisse von dem unsicheren Eintreffen der möglichen Umweltzustände abhängen. Hier wird im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre vorausgesetzt, daß der Entscheidende sein A-priori-Wissen über die möglichen Umweltzustände, das auf Erfahrungen, allgemeinen Informationen oder auch nur auf Intuition[2] beruht, in numerische Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen der einzelnen Umweltzustände umzusetzen vermag. Diese Wahrscheinlichkeiten gehen dann als A-priori-Wahrscheinlichkeiten in das Bayessche Theorem ein. Weiterhin nimmt man an, daß der Entscheidende mittels eines (Stichproben-) Experiments neue oder zusätzliche Informationen über die entscheidungsrelevanten Umweltkonstellationen gewinnen kann. Mit Hilfe des gängigen Instrumentariums der Statistik werden dann die bedingten Wahrscheinlichkeiten (Likelihoods) für das Eintreffen des beobachteten Stichprobenergebnisses unter der Voraussetzung der jeweils möglichen Umweltzustände ermittelt. Die Likelihoods werden dann zur Gewichtung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten in das Bayessche Theorem eingesetzt. Dabei erhält man schließlich die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten als Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten der alternativ möglichen Umweltzustände, nachdem ein bestimmtes Stichprobenergebnis beobachtet worden ist.

Bei Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre wird außerdem vorausgesetzt, daß der Entscheidende in der Lage ist, jeweils den bedingten Ergebnissen seiner Aktionen einen quantitativen Nutzen zuzuordnen, der allerdings auch mit den Geldwerten der Ein- oder Auszahlungen identisch sein kann. Diese Nutzen- oder Geldwerte werden jeweils mit der A-posteriori-Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens gewichtet und aufsummiert. Nach dem Bayesschen Entscheidungskriterium hat nun der Entscheidende die Aktion zu wählen, deren erwarteter Nutzen ein Maximum ist.

---

1 Auch das Unterlassen einer Aktion ist eine alternative Handlungsweise.

2 Die Bildung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf rein intuitiver Basis wird hier jedoch abgelehnt. Vgl. Abschnitt 7-1.

2-5 Das Verhältnis zwischen Bayesschem und Klassischem Konzept der statistischen Entscheidungstheorie

Bevor im folgenden die Verfahren der Bayesschen Entscheidungslehre auf einige betriebswirtschaftliche Entscheidungsprobleme angewendet werden, erscheint es angebracht, mit einigen Bemerkungen auf die Unterschiede zwischen Bayesscher und Klassischer Richtung der statistischen Entscheidungstheorie, unter der man im wesentlichen die auf den Konzeptionen von Fisher, Neyman und Pearson basierende Statistik der Schätz- und Testverfahren zu verstehen hat, einzugehen. Wenn auch von beiden Richtungen vielfach die gleichen Techniken angewendet werden, liegen doch wesentliche Unterschiede in der philosophischen Betrachtungsweise, die hinter diesen Techniken steht.

Zunächst handelt es sich um die bereits diskutierte unterschiedliche Interpretation der Wahrscheinlichkeit,[1] wobei die Bayessche Konzeption davon ausgeht, daß wahre objektive Wahrscheinlichkeiten selten existieren.[2] Im Gegensatz dazu erkennt die Klassische Richtung nur objektive Wahrscheinlichkeiten an, die meistens aufgrund empirischer Stichprobenbeobachtungen gewonnene relative Häufigkeiten sind. Die Folge davon ist, daß die A-priori-Verteilung des zu schät-

---

1 Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 2-2.

2 "Second, it is maintained here that subjective probabilities are the only kind obtainable in the real world; the relevant objective probabilities can never be known."
T. R. Dyckman, S. Smidt and A. K. McAdams: Management Decision Making under Uncertainty: An Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. 1st. printing. Toronto (Ontario) 1969, S. 285.

zenden Parameters[1] als unbekannt angesehen wird und somit auf die Anwendung des Bayesschen Theorems verzichtet werden muß.

Ein weiterer Unterscheidungspunkt ist die Definition der Ungewißheit über einen unbekannten Parameter. In der Klassischen Statistik geht man von der Prämisse aus, daß der zu schätzende Parameter einen festen und konstanten Wert hat; die Ungewißheit beruht auf Unkenntnis, das heißt der Parameter ist konstant, aber unbekannt.[2] Aufgrund einer Stichprobenbeobachtung wird dann ein Schätzwert ermittelt, und erst dieser wird als Zufallsvariable betrachtet. Zur Schätzung des Parameters wird ein Konfidenzintervall festgelegt,[3] in dem mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit der wahre Wert des Parameters vermutet wird. Die Vertreter der Bayesschen Entscheidungslehre dagegen betrachten den Parameter selbst als Zufallsvariable; das bedeutet, die Ungewißheit beruht allein auf Zufälligkeit. Zur Schätzung werden die Wahrscheinlichkeiten direkt dem Parameter zugeordnet.[4]

---

1 Unter einem Parameter versteht man eine für die gesamte Grundgesamtheit repräsentative Größe wie den Mittelwert (Erwartungswert) oder die Varianz.

2 Vgl. Günter Menges: Statistik 1..., a.a.O., S. 270 ff.

3 Die Festlegung von Konfidenzintervallen für den zu schätzenden Parameter der Grundgesamtheit aufgrund von Stichprobenbeobachtungen stellt eins der gebräuchlichsten Verfahren der Klassischen Statistik dar. Dieses Verfahren wurde von Neyman und Pearson in Anlehnung an die Fiduzialmethode von Fisher entwickelt. Vgl. Jerzey Neyman: On The Problem of Confidence Intervals. In: AMS, Bd. 6 (1935), S. 111 - 116. Zur Anwendung des Konfidenzmodells vgl. Günter Menges: Statistik 1..., a.a.O., S. 283 ff.

4 Vgl. Bruce W. Morgan: An Introduction to Bayesian Statistical Decision Processes. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968, S. 48 ff.

Das letzte der wesentlichen unterscheidenden Merkmale schließlich ist die Berücksichtigung der Konsequenzen einer Entscheidung. Während man in der Bayesschen Richtung der statistischen Entscheidungstheorie den ökonomischen Aspekt jeder Aktion - auch den der Stichprobenerhebung - durch die im Mittelpunkt stehenden ein- oder mehrfachen Erwartungswertberechnungen[1] berücksichtigt, werden in der traditionellen statistischen Entscheidungstheorie die ökonomischen Konsequenzen einer Entscheidung insofern vernachlässigt, daß man lediglich auf die Beachtung der möglichen Auswirkungen einer Entscheidung hinweist.[2] Dies wird zum Beispiel dadurch deutlich, daß bei der Festlegung des notwendigen Stichprobenumfangs n die Erfüllung einer Sicherheitswahrscheinlichkeit von meistens 0,95 oder 0,99 zur Festlegung eines Konfidenzintervalls für den zu schätzenden Parameter gefordert wird, ohne dabei dem Entscheidenden ein Kriterium dafür zu geben, ob der so errechnete Stichprobenumfang einen größeren Informationswert hinsichtlich des zu lösenden Entscheidungsproblems hat, als er an Kosten verursacht. Der gleiche Vorwurf trifft

---

1 Karl Weber: Entscheidungsprozesse ..., a.a.O., S. 73.

2 Vgl. Howard Raiffa and Robert Schlaifer: Decision Theory ..., a.a.O., S. VII.
Das Konzept der Entscheidungsfunktionen von Wald sieht allerdings eine explizite Berücksichtigung der Entscheidungskonsequenzen vor. Jedoch wird dieses als nicht zur Klassischen Statistik gehörig bezeichnet. Vgl. dazu Abraham Wald: Statistical Decision Functions. New York 1950.

auch das Verfahren des Hypothesentests.[1] Hier wird zwar anhand der Operationscharakteristik explizit auf die relative Bedeutung der Fehler erster und zweiter Art hingewiesen,[2] jedoch wird der Entscheidende bei der Wahl des kritischen Wertes wieder sich selbst überlassen.[3]

---

1 Die Technik des Hypothesentests beruht auf der Theorie des Konfidenzmodells und wurde ebenfalls von Neyman und Pearson entwickelt. Vgl. Jerzey Neyman and Egon S. Pearson: Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypothesis. In: Statistical Research Memoirs, University of London. Bd. 1 (1936), S. 1 ff und Bd. 2 (1938), S. 25 ff. Zur Hypothesenprüfung vgl. Günter Menges: Statistk 1 ..., a.a.O., S. 294 ff.

2 Ein Fehler erster Art oder α-Fehler bezeichnet das Risiko, eine Hypothese abzulehnen, obwohl sie richtig ist; dagegen betrifft der Fehler zweiter Art oder β-Fehler das Risiko, eine Hypothese anzunehmen, obwohl sie falsch ist.

3 Nach Menges hat Fisher, auf den wesentliche Grundlagen der modernen Statistik zurückzuführen sind, sich in seinen letzten Jahren dagegen gewandt, die statistischen Schätzverfahren als zur Entscheidungstheorie gehörend zu betrachten. Vgl. Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 286 ff.

3 DIE ANWENDUNG DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE BEI ENTSCHEIDUNGSPROBLEMEN IM REVISIONSWESEN

3-1 Der Prüfungsprozeß als Entscheidungsprozeß

Die Aufgabe des Revisionswesens besteht generell in der Überwachung des Unternehmensgeschehens. Vielfach vollzieht sich diese Überwachung in Form von Buch- oder Jahresabschlußprüfungen durch einen Soll-Ist-Vergleich und geistiges Nachvollziehen bereits abgeschlossener Vorgänge,[1] wobei die Prüfungsunterlagen aus Belegen, Buchungen oder Inventurergebnissen bestehen. Das Urteil des Prüfers, das seine Entscheidung über die Ordnungsmäßigkeit des geprüften Sachverhalts zum Ausdruck bringt, basiert auf einem Soll-Ist-Vergleich.[2]

Da von den Entscheidungen des Prüfers wiederum andere, häufig folgenschwere Entscheidungen der Unternehmensführung und (oder) der Kapitaleigner abhängen, werden fol-

---

1 "Prüfung ist ein nicht in Arbeitsabläufe eingebauter planmäßiger und systematischer Beurteilungsprozeß durch Vergleich eines vom Prüfer nicht selbst herbeigeführten Istobjekts mit einem vorgegebenen oder zu ermittelnden Sollobjekt und anschließender Urteilsbildung."
Ulrich Leffson: Das wirtschaftliche Prüfungswesen im System der allgemeinen Betriebswirtschaftslehre. In: WPg, 22. Jg. (1969), S. 394.

2 Das Urteil des Prüfers über einen zu prüfenden Sachverhalt bezieht sich jeweils auf ein Prüfungsfeld, unter dem man ein abgegrenztes Gebiet des Prüfungsstoffs versteht, das aus einer Anzahl möglichst homogener Vorgänge bestehen soll. Die Gesamtheit aller Prüfungsfelder ergibt das Prüfungsgebiet.
Vgl. dazu Erich Loitlsberger: Treuhand- und Revisionswesen. 2., überarbeitete und erweiterte Aufl. Stuttgart 1961, S. 27.

gende Anforderungen an das Prüfungsurteil gestellt:[1]

(1) Die Abweichungen zwischen Soll- und Istobjekt sind hinreichend genau zu erfassen.

(2) Die Aussagen bezüglich der festgestellten Abweichungen müssen möglichst sicher sein.

Das Urteil des Prüfers gründet sich auf die durch seine Prüfungshandlungen[2] erworbenen Informationen, so daß die Genauigkeit und Sicherheit seines Urteils von der Menge und Qualität der erreichten Informationen abhängen. Bei einer Vollprüfung wird die Menge der zu erreichenden Informationen maximiert. Damit ist der Prüfer nach Auswertung der Informationen und entsprechender Fehlerdefinition und -gewichtung in der Lage, ein optimales Urteil zu fällen.

Einer Vollprüfung stehen jedoch in den meisten Fällen folgende Restriktionen entgegen:[3]

(1) Die Prüfungszeit. Sie kann wegen der Störungen des Betriebsablaufs nicht beliebig ausgedehnt werden.[4]

(2) Die Prüfungskosten, die mit dem Umfang der Prüfungshandlungen steigen. Den wesentlichen Anteil an den Prüfungskosten stellen die Kosten für die Arbeitsstunden des Prüfers oder seiner Assistenten dar.

---

1 Vgl. Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden der Urteilsgewinnung bei Unternehmensprüfungen. Bd. 3 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen-Wilhelms-Universität Münster. Hrsg. von U. Leffson. Düsseldorf 1970, S. 19 f.

2 Im wesentlichen sind das: planen, vergleichen, bewerten ermitteln, rechnen. Vgl. dazu u.a. Ralf Krüger: Grundlagen der Planung einer aktienrechtlichen Jahresabschlußprüfung. Diss. Münster 1968, S. 40.

3 Bei Kassenprüfungen oder bei Betriebsprüfungen der Finanzbehörden sind Vollprüfungen üblich.

4 Es ist auch möglich, daß - wie bei der aktienrechtlichen Jahresabschlußprüfung - der Prüfungsbericht innerhalb einer bestimmten Frist erstellt sein muß.

Diese Restriktionen haben zur Folge, daß nur selten eine Revision als Vollprüfung vorgenommen wird. Stattdessen begnügt man sich damit, Auswahlprüfungen[1] vorzunehmen, bei denen nur ein Teil des Prüfungsfeldes auf seine Ordnungsmäßigkeit hin überprüft wird. Während der Prüfer bei Vornahme einer Vollprüfung durchaus in der Lage ist, bei der Urteilsbildung eine eindeutige Entscheidung zu treffen, ergibt sich bei einer Auswahlprüfung für ihn das Problem, aufgrund weniger Informationen eine Entscheidung bezüglich der Ordnungsmäßigkeit des gesamten Prüfungsfeldes zu treffen. Gemäß der an das Prüfungsurteil gestellten Anforderungen ist zu beachten, daß der Prüfer seine Entscheidungen hinreichend genau und möglichst sicher zu fällen hat. Um das Problem der Unbestimmtheit von Prüfungsurteilen zu umgehen, fordert man im neueren Schrifttum die Quantifizierung der Aussagen des Prüfungsurteils - eine Forderung, der nur durch Anwendung von uneingeschränkten Zufallsauswahlen[2] bei der Auswahlprüfung

---

1 Eine Auswahl kann z.B. als Willkürauswahl, gezielte Auswahl, typische Auswahl oder Zufallsauswahl durchgeführt werden. Vgl. dazu u.a. Lawrence L. Vance and John Neter: Statistical Sampling for Auditors and Accountants. New York 1956, S. 17 f. Günter Menges: Stichproben aus endlichen Grundgesamtheiten. Theorie und Technik. Ein Beitrag zur Methodenlehre der Statistik. Frankfurt am Main 1959, S. 79 ff. Robert Buchner: Bewußte Auswahl oder Zufallsauswahl bei der aktienrechtlichen Pflichtprüfung. In: WPg, 14. Jg. (1961), S. 657 - 659.

2 Eine uneingeschränkte Zufallsauswahl bedeutet, daß jedes Element der Grundgesamtheit (hier: die Untersuchungseinheiten des Prüfungsfeldes in Form von Buchungen oder Belegen) eine von Null verschiedene Chance hat, in die Auswahl einbezogen zu werden. Diese Forderung macht es möglich, mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung den Fehler zu berechnen, der dadurch entsteht, daß nur ein Teil der Grundgesamtheit untersucht wird. Vgl. dazu Hans Kellerer: Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens. München 1963, S. 13. Einen Katalog möglicher Verfahren von Zufallsauswahlen findet man bei Schulte, der die Auswahl nach Zufallszahlen empfiehlt. Vgl. Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden ..., a.a.O., S. 47 ff.

Folge geleistet werde kann.[1] Hierbei vermögen statistische Verfahren dem Prüfer wertvolle Hilfe zu leisten. Häufig sind jedoch die Problemstellungen im Revisionswesen anders als in den Bereichen, in denen die klassischen statistischen Lösungsverfahren vorbehaltlos anzuwenden sind. Daher soll dieses Kapitel zur Beantwortung der Frage dienen, welchen Beitrag zur Aussagesicherheit und -genauigkeit von Prüfungsurteilen die Bayessche Entscheidungslehre im Vergleich zu den herkömmlichen Verfahren der Statistik im Falle eines für Buchprüfungen typischen Problems, der Schätzung von Fehleranteilen eines Prüfungsfeldes, zu leisten vermag.

---

1 In der amerikanischen Literatur gibt es bereits eine Fülle an Diskussionen über die Anwendung von Zufallsstichproben im Revisionswesen; vgl. die Bibliographie des AICPA. In: JofA, July 1964, S. 56 - 58.
Dagegen sind die Ansätze in der deutschen Literatur noch überschaubar. Vgl. hier u.a. Gerhart Gomm: Stichprobenverfahren in der Revisionstechnik. Diss. Nürnberg 1965; Karl Elmendorf: Anwendbarkeit von Zufallsstichproben bei der Abschlußprüfung. Düsseldorf 1963. Rolf Rackles: Das Problem der repräsentativen Auswahl bei der aktienrechtlichen Pflichtprüfung. Diss. Frankfurt am Main 1961; Ulrich Leffson, Klaus Lippmann und Jörg Baetge: Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Urteilsbildung bei Prüfungen. Bd. 1 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Hrsg. von U. Leffson. Düsseldorf 1969.

3-2 Das Problem der Schätzung von Fehleranteilen bei Anwendung klassischer Lösungsverfahren

Vielfach ist es das Ziel von Unternehmensprüfungen, ein Urteil über die Ordnungsmäßigkeit des Rechnungswesens abzugeben. Grundlage eines solchen Prüfungsurteils ist der Anteil nicht korrekt verbuchter Geschäftsvorfälle der einzelnen Prüfungsfelder. Unter der Voraussetzung einer Auswahlprüfung[1] ergibt sich hier das Problem für den Prüfer, aufgrund des Ergebnisses einer Stichprobe Schlußfolgerungen über die Höhe des unbekannten Fehleranteils der Untersuchungsgesamtheit zu ziehen,[2] die der Forderung nach einem möglichst sicheren und genauen Prüfungsurteil entsprechen.

Bei der Prüfung der Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes werden die Stichprobenelemente nur nach dem Merkmal "Korrektheit" hin untersucht, so daß bei der Auswertung des Stichprobenergebnisses die homograde Theorie der Statistik Anwendung findet.[3] Die zugrunde liegenden Stichproben lassen sich nach dem mit der Fragestellung verfolgten Zweck aufteilen in:[4]

---

1 Unter einer Auswahlprüfung soll gemäß der in Abschnitt 3-1 dargelegten Begründung im folgenden immer die Anwendung von Zufallsstichproben verstanden werden.

2 Diesen Schluß von Parametern der Stichprobe auf Parameter der Grundgesamtheit bezeichnet man in der Statistik als Repräsentationsschluß; im Gegensatz dazu steht der Inklusionsschluß, bei dem aufgrund eines Parameters der Grundgesamtheit auf den zu erwartenden Parameter der Stichprobe geschlossen wird.

3 Die homograde Theorie befaßt sich mit den Fällen, in denen die Elemente nur dahingehend untersucht werden, ob sie ein bestimmtes kategoriales Merkmal vorweisen oder nicht (binäre Fragestellung); die heterograde Theorie dagegen dient der Betrachtung quantitativer Merkmale.
Vgl. dazu Hans Dinter: Zur Frage der Verwendung von Stichprobenverfahren im Rahmen von Prüfungshandlungen. In: WPg, 15. Jg. (1962), S. 86 f.

4 Zu dieser Aufteilung vgl. u.a. Karl Elmendorf: Zufallsstichproben ..., a.a.O., S. 21 ff. Ulrich Leffson et al.: Zur Sicherheit ..., a.a.O., S. 29 ff. Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden..., a.a.O., S. 115 ff.

(1) Annahmestichproben.
Mit Hilfe der Stichprobe soll getestet werden, ob eine bestimmte Hypothese über den Fehleranteil eine Prüfungsfeldes akzeptiert werden kann oder nicht.

(2) Entdeckungsstichproben.
Die Stichprobe soll die Frage beantworten, mit welcher Wahrscheinlichkeit in einer Stichprobe gegebenen Umfangs bei gegebenem Fehleranteil des Prüfungsfeldes zumindest ein oder mehrere Fehler entdeckt werden.

(3) Schätzstichproben.
Die Stichprobe dient dazu anzugeben, in welchem Bereich der unbekannte Fehleranteil der Grundgesamtheit mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit liegt.

Zur Abgabe eines Prüfungsurteils über die Höhe des unbekannten Fehleranteils eines Prüfungsfeldes eignet sich von der Fragestellung her nur die Schätzstichprobe. Um mit Hilfe der Schätzstichprobe aufgrund des beobachteten Stichprobenergebnisses auf den unbekannten Fehleranteil der Untersuchungsgesamtheit zu schließen, ist vom Konzept des Konfidenzmodells auszugehen. Dieses besteht in der Angabe von Zufallsintervallen, die den unbekannten festen Parameter der Untersuchungsgesamtheit mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit überdecken. Dabei dient der in der Stichprobe beobachtete Parameter als Ausgangspunkt zur Festlegung der Intervallgrenzen,[1] die für den homograden Fall mit p_u und p_o bezeichnet seien. Die Differenz zwischen dem Fehleranteil p der Stichprobe und p_u bzw. p_o betrage d_u bzw. d_o. Bei einer vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit von α wird für den unbekannten Fehleranteil Θ ein Konfidenzintervall wie folgt bestimmt:

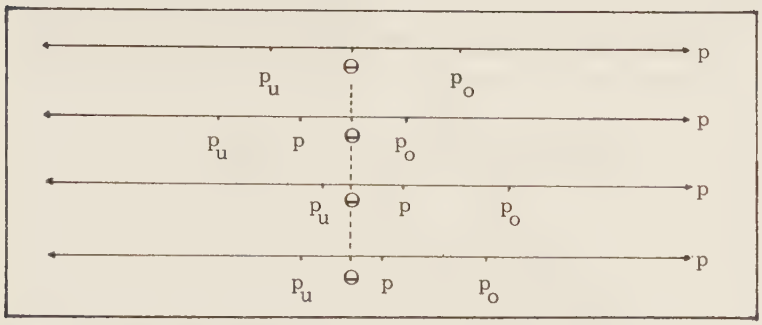
$$(3\text{-}1) \qquad W(p - d_u \leq \Theta \leq p + d_o) = 1 - \alpha .$$

---

1 Zur Kritik an dieser Vorgehensweise vgl. Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 285 f. und die dort aufgeführte Literatur.

Abbildung 3-1

Veranschaulichung eines homograden Konfidenzintervalls für Θ



Es stellt sich jetzt die Frage nach der Konfidenzwahrscheinlichkeitsverteilung, aus der bei vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit die Intervallgrenzen bestimmt werden. Für den vorliegenden Fall bedeutet das, daß das Verteilungsgesetz der fehlerhaften Buchungen innerhalb eines Prüfungsfeldes zu bestimmen ist.

Zur Beantwortung der Frage nach dem Verteilungsgesetz soll der Fall einer Buchprüfung als statistisches Urnenmodell aufgefaßt werden. Damit läßt sich die Menge des Prüfungsstoffs als Anzahl N der in einer Urne befindlichen Kugeln sehen, von denen eine Anzahl M ein bestimmtes Merkmal (hier: fehlerhafte Buchung) aufweisen. Die Urne stellt also den zugrunde liegenden Ereignisraum dar, dessen Elemente aus der Menge des Prüfungsstoffs (hier: Buchungen) bestehen. Es wird nun ein Zufallsexperiment in Form einer Stichprobe "ohne Zurücklegen" durchgeführt, indem man der Urne eine Anzahl von n Kugeln einzeln nacheinander entnimmt, ohne diese der Urne wieder hinzuzufügen.[1] Gefragt wird nach der

1 Bei den meisten Fragestellungen im Revisionswesen handelt es sich um einen homograden Fall, bei dem eine Stichprobe ohne Zurücklegen gezogen wird; denn ein einmal untersuchter Geschäftsvorfall wird wohl kaum während der Prüfung der Untersuchungsgesamtheit wieder hinzugefügt.

Wahrscheinlichkeit, unter den n Buchungen genau x fehlerhafte zu finden, wobei x als Realisation der Zufallsvariablen X anzusehen ist. Mit Hilfe der Kombinatorik läßt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeitsverteilung für X als Hypergeometrische Verteilung ableiten.[1] Damit ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für x fehlerhafte Buchungen in der Stichprobe gemäß der Formel für die Hypergeometrische Verteilung als:

$$(3\text{-}2) \qquad W(X = x) = f_H(x;\, N,\, n,\, M) = \frac{\binom{M}{x} \cdot \binom{N - M}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad .$$

Wegen rechentechnischer Schwierigkeiten erweist sich jedoch das Arbeiten mit der Hypergeometrischen Verteilung bei praktischen Unternehmensprüfungen als zu aufwendig, so daß es sinnvoll erscheint, die Hypergeometrische Verteilung durch ein anderes theoretisches Verteilungsgesetz zu approximieren.[2] Als mögliche approximative Verteilung ist die Binomialverteilung zu nennen, gegen die die Hypergeometrische Verteilung bei wachsendem Umfang der Grundgesamtheit und unverändertem relativen Anteil des zu beobachtenden Merkmals konvergiert.[3] Für $\frac{n}{N} < 0,5$ kann anstelle der Hypergeometrischen Verteilung näherungsweise die Binomialverteilung verwendet werden, wobei die Approximation umso genauer ist, je näher der relative Anteil des zu beobachtenden Merkmals Θ bei 0,5 liegt.[4]

---

1 Zur Ableitung der Hypergeometrischen Verteilung vgl. u.a. Leopold Schmetterer: Einführung in die mathematische Statistik. 2. verbesserte und wesentlich erweiterte Aufl. Wien · New York 1966, S. 111 f.

2 Zwar ist die Hypergeometrische Verteilung leicht und ohne viel Speicherkapazität programmierbar, jedoch bedeutet diese Tatsache für den Prüfer nur dann eine Hilfe, wenn auch eine Datenverarbeitungsanlage greifbar ist. Außerdem rechtfertigt häufig der Aufwand an Zeit und Kosten den Einsatz einer solchen Anlage nicht.

3 Zur Binomialverteilung vgl. u.a. Kurt Stange: Angewandte Statistik. 1. Teil: Eindimensionale Probleme. Berlin · Heidelberg · New York 1970, S. 418 ff. und 578 ff.

4 Zur Approximation vgl. u.a. Graf · Henning · Stange: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. 2. völlig neu bearbeitete Aufl. von K. Stange und H.-J. Henning. Berlin · Heidelberg · New York 1966, S. 7.

In der Prüfungspraxis sind aber selten Fälle zu beobachten, in denen der Anteil fehlerhafter Buchungen den Wert von 0,1 oder 10% übersteigt.[1] Hier läßt sich zeigen, daß mit $n \to \infty$ und $\frac{M}{N} = \Theta \to 0$ sowie $N \gg n$ die Hypergeometrische Verteilung in die Poissonverteilung[2] mit dem Parameter $\mu = n \cdot \Theta$ übergeht.[3] Fordert man zur Approximation ein Genauigkeitskriterium, das für die mit der Poissonverteilung approximierten Wahrscheinlichkeiten für den gesamten Bereich der hypergeometrisch verteilten Zufallsvariablen X eine Abweichung von den mit Hilfe der Hypergeometrischen Verteilung berechneten Wahrscheinlichkeiten um höchstens 1% zuläßt, also folgendes gilt:

$$(3\text{-}2) \quad \max |W_H(\xi_o \leq X \leq \xi_1) - W_P(\xi_o \leq X \leq \xi_1)| \leq 0,01,$$

dann gilt als Approximationsbedingung die folgende Beziehung:[4]

$$(3\text{-}3) \quad n(N - n) + M(N - M) \leq 0,04N^2.$$

Unter der Voraussetzung, daß der Wert von n kleiner ist als die Werte von N - n, M und N - M, also

$$(3\text{-}4) \quad n = \tilde{n} = \min\left\{n,\ N - n,\ M,\ N - M\right\},$$

wird der Parameter μ der Poissonverteilung wie folgt bestimmt:

$$(3\text{-}5) \quad \mu = n \cdot \frac{M}{N} = n \cdot \Theta.$$ [5]

---

1 Vgl. u.a. Howard F. Stettler: Auditing Principles. 2nd. ed. Englewood Cliffs (New Jersey) 1961, S. 226 ff. Ein Fehleranteil von $p > 0,1$ kommt möglicherweise vor, wenn:
(a) zufällig alle Falschbuchungen erfaßt werden;
(b) die Buchhaltung sich in einem völlig desolaten Zustand befindet.
In beiden Fällen wird sich der Prüfer jedoch nicht auf das Stichprobenergebnis beschränken, sondern entweder eine Vollprüfung oder eine wiederholte Auswahlprüfung vornehmen.

2 Zur Poissonverteilung vgl. u.a. Kurt Stange: Statistik..., a.a.O., S. 518 ff. Bernard W. Lindgren: Statistical Theory. 2nd. ed. New York · London 1968, S. 161 ff. Emanuel Parzen: Modern Probability Theory and Its Applications. New York · London 1960, S. 105 ff.

3 Zum Grenzübergang vgl. Wolfgang Wetzel, Max-Detlev Jöhnk und Peter Naeve: Statistische Tabellen. Berlin 1967, S. 22 ff.

4 Vgl. ebenda S. 23 f.

5 Das gilt nur, wenn $n \cdot \Theta < n \cdot (1 - \Theta)$.

Die Approximationsbedingung (3-3) dürfte bei Buchprüfungen in den meisten Fällen erfüllt sein, so daß eine Approximation der theoretisch exakten Hypergeometrischen Verteilung durch eine Poissonverteilung zulässig erscheint.

Zieht man die Poissonverteilung zur Bildung eines Konfidenzintervalls für den unbekannten Anteil fehlerhafter Buchungen des Prüfungsfeldes Θ heran, sind wegen ihrer Asymmetrie[1] die Bereiche $p - d_u$ und $p + d_o$ bei vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit gesondert zu betrachten.[2] Ist W_u die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Θ den Wert p_u mindestens annimmt, und W_o die Wahrscheinlichkeit dafür, daß Θ höchstens gleich p_o ist, wird die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit $1 - \alpha$ dafür, daß Θ zwischen p_u und p_o liegt, durch W_u und W_o wie folgt bestimmt:

$$(3\text{-}5) \qquad W(p_u \leq \Theta \leq p_o) = W_o - (1 - W_u).$$

Zur Bstimmung der Intervallgrenzen ist davon auszugehen, daß jede beliebige Stichprobe des vorgegebenen Umfangs n mit einer Wahrscheinlichkeit von W_u höchstens die in der zugrunde liegenden Stichprobe beobachtete Fehlerzahl $x = n \cdot p$ aufweisen darf,

---

1 Ein Verteilungstyp ist dann als asymmetrisch zu bezeichnen, wenn den Werten mit gleicher Entfernung links und rechts vom Mittelwert eine unterschiedliche relative Häufigkeit zukommt. Die Asymmetrie einer Poissonverteilung hängt von der Größe ihres Parameters μ ab: Mit wachsen dem μ wird die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsfunktion der Poissonverteilung immer "symmetrischer".

2 Zur Bildung von Konfidenzintervallen bei unterstellter Poissonverteilung vgl. Richard M. Cyert: Test-Checking and the Poisson Distribution - A Further Comment. In: Acc. Rev., Bd. 32 (1957), S. 395 ff. Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden..., a.a.O., S. 146 ff.

wenn Θ den Wert von p_u annimmt. Ist dagegen Θ gleich p_o, ist die Wahrscheinlichkeit, in einer Stichprobe vom Umfang n mindestens die beobachtete Fehlerzahl x zu entdecken, gleich W_o. Dabei sind W_u und W_o durch die Verteilungsfunktion der Poissonverteilung folgendermaßen bestimmt:

$$(3\text{-}6) \qquad W_u = \sum_{v=0}^{x} \frac{n \cdot p_u \cdot e^{-n \cdot p_u}}{v!} \quad ; (v = 0, 1, 2, \ldots, x).$$

$$(3\text{-}7) \qquad W_o = \sum_{v=x}^{n} \frac{n \cdot p_o \cdot e^{-n \cdot p_o}}{v!} \quad ; (v = x, x+1, x+2, \ldots, n).$$

Da eine Auflösung der Gleichungen (3-6) und (3-7) nach den Grenzen des Konfidenzintervalls p_u und p_o mathematisch unmöglich ist, wird anstelle der Poissonverteilung die χ^2-Verteilung verwendet.[1] Die Intervallgrenzen sind dann nach folgenden Beziehungen zu berechnen:[2]

$$(3\text{-}8) \qquad p_u = \frac{1}{2n} \cdot \chi^2_{W_u;\nu} \quad ; \text{ mit } \nu = 2x.$$

$$(3\text{-}9) \qquad p_o = \frac{1}{2n} \cdot \chi^2_{1-W_o;\nu} \quad ; \text{ mit } \nu = 2(x+1).$$

Zur Ermittlung von p_u und p_o ist in einer Tabelle der χ^2-Verteilung der Wert für χ^2 abzulesen, der der geforderten Sicherheitswahrscheinlichkeit von W_u und W_o und dem Freiheitsgrad ν entspricht.[3] Die so erhaltenen Werte sind in die Gleichungen (3-8) und (3-9) einzusetzen. Über die Beziehung (3-5) läßt sich dann anschließend das entsprechende Konfidenzintervall bilden.

---

1 Zum Grenzübergang der Poissonverteilung in die χ^2-Verteilung vgl. Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 14 ff.

2 Vgl. Graf · Henning · Stange: Formeln..., a.a.O., S. 57.

3 Zur Vertafelung der χ^2-Verteilung vgl. Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 104 ff.

Anhand des folgenden Beispiels soll die Vorgehensweise erläutert werden: Anläßlich der Prüfung der Ordnungsmäßigkeit des Jahresabschlusses soll das Prüfungsfeld "Kreditorenbuchhaltung" geprüft werden. Von den N = 10.000 Belegen des Prüfungsstoffs wählt der Prüfer zufällig n = 100 Belege aus, unter denen er x = 2 bzw. $p = \frac{x}{n} = 0,02$ falsche Buchungen entdeckt. Aufgrund dieses Ergebnisses ist für den wahren Anteil Θ falscher Buchungen dieses Prüfungsfeldes ein Konfidenzintervall abzugrenzen, wobei eine Sicherheit von $1 - \alpha = 0,98$ gefordert wird. Damit beträgt W_u und W_o jeweils 0,99.

Den entsprechenden χ^2-Wert für die untere Intervallgrenze liest man für $W_u = 0,99$ und $\nu = 2x = 2 \cdot 2 = 4$ als $\chi^2_{0,99;\,4} = 0,297$ ab. Setzt man diesen Wert in die Gleichung (3-8) ein, erhält man:

(3-8a) $$p_u = \frac{1}{2 \cdot 100} \cdot 0,297 = 0,001485.$$

Für die obere Intervallgrenze ergibt sich für $1 - W_o = 0,01$ und $\nu = 2(x + 1) = 2 \cdot 3 = 6$ $\chi^2_{0,01;\,6} = 16,812$. Eingesetzt in (3-9):

(3-9a) $$p_o = \frac{1}{2 \cdot 100} \cdot 16,812 = 0,08406.$$

Nach der Beziehung (3-5) erhält man die folgende Konfidenzwahrscheinlichkeit für Θ:

(3-5a) $$W(0,001485 \leq \Theta \leq 0,08406) = 0,98.$$

Daraus kann der Prüfer das Prüfungsurteil ableiten, daß sich der wahre Fehleranteil des Prüfungsfeldes "Kreditorenbuchhaltung" mit 98%iger Sicherheit zwischen 0,1485% und 8,406% befindet.

Der unteren Grenze des Konfidenzintervalls kommt bei Buchprüfungen jedoch keine weitere Bedeutung zu, weil der Prüfer meistens nur wissen möchte, wie groß der Fehleranteil des Prüfungsfeldes bei vorgegebener Sicherheitswahrscheinlichkeit höchstens ist. Setzt man daher $p_u = 0$, entspricht die Aussagesicherheit $1 - \alpha$ der Wahrscheinlichkeit, daß Θ höchstens den Wert p_o annimmt. Für unser Beispiel bedeutet das:

(3-5b) $$W(0 \leq \Theta \leq 0,08406) = 0,99.$$

Der Prüfer kann nunmehr angeben, daß die Kreditorenbuchhaltung mit 99%iger Sicherheit höchstens 8,406% Fehler enthält.

3-3 Die Schätzung von Fehleranteilen auf Bayesscher Grundlage

Legt man die für die Verteilung von Fehlern bei Buchprüfungen theoretisch exakte Hypergeometrische Verteilung[1] zugrunde, ist zu berücksichtigen, daß es sich bei den aufgrund der Wahrscheinlichkeitsfunktion gemachten Wahrscheinlichkeitsaussagen um bedingte Wahrscheinlichkeiten (Likelihoods)[2] handelt; denn die mit Hilfe der Formel der Hypergeometrischen Verteilung (3-2) berechneten Wahrscheinlichkeiten sind an die Voraussetzung geknüpft, daß die Parameter der Hypergeometrischen Verteilung, N, n und M, bekannt sind. Der Umfang der Untersuchungsgesamtheit N und der Stichprobenumfang n bereiten hier keine Probleme; anders jedoch die Anzahl fehlerhafter Buchungen in der Grundgesamtheit M. Gerade über M will der Prüfer eine Aussage machen, so daß eine Berechnung der Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten von bestimmten Stichprobenergebnissen immer einen hypothetischen Charakter besitzt. Somit haben die Wahrscheinlichkeitsaussagen nur dann Gültigkeit, wenn M tatsächlich den unterstellten Wert angenommen hat. Die Formel der Hypergeometrischen Verteilung (3-2) läßt sich dann auch folgendermaßen schreiben:

$$(3\text{-}10) \qquad W_H(X = x/M_i) = \frac{\binom{M_i}{x} \cdot \binom{N - M_i}{n - x}}{\binom{N}{n}} \quad ; \; i = 0, 1, \ldots, N.$$

Da dem Prüfer die Fehlerzahl M_i des Prüfungsfeldes unbekannt ist, kann sie für ihn vor Durchführung der Prüfung sehr viele Werte annehmen, von denen aber nur einer den tatsächlichen M-Wert der Grundgesamtheit für die betreffende Prüfungsperiode darstellt. Auf die tatsächliche Höhe der Fehlerzahl können

---

1 Vgl. die Ausführungen in Abschnitt 3-2. Vgl. auch Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden ..., a.a.O., S. 91 f.

2 Zur Likelihood vgl. die Wahrscheinlichkeitsbegriffe in Abschnitt 2-2.

folgende Faktoren einen Einfluß ausüben:[1]

(1) Nachlässigkeit des Personals;

(2) dolose Absichten des Personals oder der Unternehmensführung;

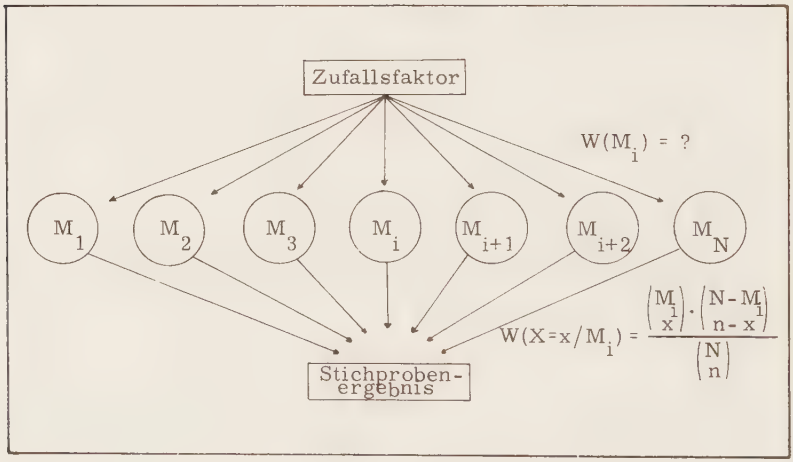
(3) falsche Auswertung von Informationen;

(4) technische Fehler.

Diese Faktoren lassen sich auch zu einem einzigen Zufallsfaktor zusammenfassen, der die Größe der Zufallsvariablen M[2)] festlegt.[3] Diesen Zusammenhang zeigt die folgende Abbildung 3-2.

Abbildung 3-2

Die Fehlerzahl M als Zufallsvariable



1 Diese Aufzählung erhebt selbstverständlich keinen Anspruch auf Vollständigkeit.

2 Zu beachten ist, daß man in der Bayesschen Entscheidungslehre den unbekannten Parameter a priori generell als Zufallsvariable aufzufassen hat. Das gilt in diesem Zusammenhang auch für M; lediglich für eine bestimmte Prüfungsperiode nimmt M einen festen Wert an. Vgl. dazu auch Abschnitt 2-5.

3 Vgl. John A. Tracy: Bayesian Statistical Confidence Intervals for Auditors. In: JofA, Bd. 127/128 (1969), S. 43 f.

Wäre es möglich anzugeben, mit welcher Wahrscheinlichkeit die M_i-Werte verteilt sind, könnte man aufgrund des Bayesschen Theorems die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen M_i-Werte unter der Voraussetzung, daß ein bestimmtes Stichprobenergebnis x_j beobachtet wurde, berechnen. Setzt man anstelle der Likelihoods die Hypergeometrische Verteilung in der Form (3-10) ein und definiert die A-priori-Wahrscheinlichkeiten als $W(M_i)$, läßt sich das Bayessche Theorem wie folgt schreiben.[1]

$$(3\text{-}11) \qquad W(M_i/x_j) = \frac{W(M_i) \cdot \dfrac{\binom{M_i}{x_j}\binom{N - M_i}{n - x_j}}{\binom{N}{n}}}{\sum_{i=1}^{N} W(M_i) \cdot \dfrac{\binom{M_i}{x_j}\binom{N - M_i}{n - x_j}}{\binom{N}{n}}} \; .$$

Die mit dem Bayesschen Theorem zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit $W(M_i/x_j)$ ist die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, in dem zu untersuchenden Prüfungsfeld eine bestimmte Fehlerzahl M_i unter der Voraussetzung zu finden, daß v o r h e r ein bestimmtes Stichprobenergebnis x_j beobachtet wurde. Für den Prüfer erscheint jedoch die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Fehlerzahl M_i des Prüfungsfeldes nicht so informativ, wie die Wahrscheinlichkeit dafür, daß eine bestimmte kritische Fehlerzahl M_c oder Fehleranteil Θ_c nicht überschritten wird. Diese Wahrscheinlichkeit läßt sich dadurch berechnen, daß man die einzelnen A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für M_i mit $i = 0, 1, 2, \ldots, c$ kumuliert. Das Bayessche Theorem in der Form (3-11) wird dann folgendermaßen geschrieben:

---

1 Vgl. Abschnitt 2-1; ebenso R o b e r t B u c h n e r : Zur Anwendung des Bayesschen Theorems bei Buchprüfungen auf Stichprobenbasis. In: ZfB, 41. Jg. (1971), S. 9 f.

$$(3\text{-}12) \qquad W_{cum}(M_i \leq M_c/x_j) = \frac{\sum_{j=1}^{c} W(M_i) \cdot \frac{\binom{M_i}{x_j}\binom{N - M_i}{n - x_j}}{\binom{N}{n}}}{\sum_{i=1}^{N} W(M_i) \cdot \frac{\binom{M_i}{x_j}\binom{N - M_i}{n - x_j}}{\binom{N}{n}}}.$$

An diesem Punkt bedarf es wieder des einschränkenden Hinweises auf die rechentechnischen Schwierigkeiten beim Arbeiten mit der Hypergeometrischen Verteilung,[1] womit sich gleichzeitig die Frage nach der zulässigen Approximation stellt. Die Prüfung dieser Frage ergab bei der Konstruktion eines Konfidenzintervalls, daß eine Approximation der Hypergeometrischen Verteilung wegen der meist kleinen Fehlerquoten im Rechnungswesen durch eine Poissonverteilung zulässig ist.[2] Bei der Berechnung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten müßten aber eigentlich alle theoretisch möglichen M_i-Werte berücksichtigt werden,[3] so daß die Fehlerquote Θ auch wegen $\frac{M_i}{N} = \Theta_i$ größere Werte annehmen kann, für die diese Approximation nicht mehr zulässig ist. Berücksichtigt man jedoch, daß von dem theoretisch möglichen Bereich der Θ_i-Werte ($0 \leq \Theta_i \leq 1$) bei praktischen Unternehmensprüfungen nur Fehlerquoten bis etwa 10% in Frage kommen,[4] erscheint die Approximation der

---

1 Vgl. Abschnitt 3-2.

2 Zur Frage der Approximation der Hypergeometrischen Verteilung vgl. Abschnitt 3-2.

3 Im Gegensatz dazu erfolgt die Bestimmung der Grenzen eines Konfidenzintervalls mit Hilfe der Poissonverteilung durch eine Summierung über die Wahrscheinlichkeiten aller alternativ möglichen Stichprobenergebnisse einer Grundgesamtheit mit einem bestimmten M_i-Wert. Vgl. dazu Abschnitt 3-2.

4 Vgl. Abschnitt 3-2.

Hypergeometrischen Verteilung allein durch die Poissonverteilung zur Berechnung der Likelihoods gerechtfertigt. Hinzu kommt, daß bei genügend großem Stichprobenumfang n und $\Theta \leq 0,1$ die Wahrscheinlichkeit, kleine Fehleranteile p in der Stichprobe zu beobachten, nahezu Null ist und daher für praktische Zwecke vernachlässigt werden kann.[1] Setzt man anstelle der Hypergeometrischen Verteilung nun zur Berechnung der Likelihoods die Poissonverteilung in das Bayessche Theorem ein, ergibt sich:

$$(3\text{-}13) \qquad W_{cum}(M_i \leq M_c/x_j) = \sum_{j=1}^{c} \frac{W(M_i) \cdot \frac{1}{x!} \cdot n \cdot \frac{M_j}{N}^x \cdot e^{-n \cdot \frac{M_j}{N}}}{\sum_{i=1}^{N} W(M_i) \cdot \frac{1}{x!} \cdot n \cdot \frac{M_j}{N}^x \cdot e^{-n \cdot \frac{M_j}{N}}} ;$$

oder bei Betrachtung der Fehleranteilswerte $\Theta_i = \frac{M_j}{N}$:

$$(3\text{-}14) \qquad W_{cum}(M_i \leq M_c/x_j) = \sum_{j=1}^{c} \frac{W(\Theta_i) \cdot \frac{1}{x!} \cdot n \cdot \Theta_i^x \cdot e^{-n \cdot \Theta_i}}{\sum_{i=1}^{N} W(\Theta_i) \cdot \frac{1}{x!} \cdot n \cdot \Theta_i^x \cdot e^{-n \cdot \Theta_i}} .$$

Ungeklärt ist noch die Frage, welche Wahrscheinlichkeiten den einzelnen Θ_i-Werten a priori zuzuordnen sind. Folgt man dem Prinzip des unzureichenden Grundes (sogenannte Laplace'sche Gleichmöglichkeitsdefinition),[2] das besagt, daß man im Falle der

---

1 Ist z.B. n = 100 und $\Theta = 0,1$, ergibt sich $\mu = n \cdot \Theta = 10$. Die Wahrscheinlichkeit für p = 0,02 ist unter diesen Voraussetzungen 0,00023 - also sehr klein.

2 Das Verfahren der Zuordnung einer Gleichverteilung für die A-priori-Wahrscheinlichkeiten wird häufig zur Anwendung des Bayesschen Theorems vorgeschlagen, um die Problematik der Ermittlung subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu umgehen, wobei man sich auf eine recht zweifelhafte Interpretation der Ausführungen von Bayes stützt. Wie wenig sinnvoll diese Vorgehensweise allerdings ist, wird noch im Verlauf dieses Abschnitts gezeigt. Vgl. dazu Günter Menges: Über Thomas Bayes ..., a.a.O., S. 485 ff.

Unkenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Merkmalsausprägung jeder Merkmalsausprägung die gleiche Wahrscheinlichkeit zuzuordnen hat,[1] ergibt sich für jede Wahrscheinlichkeit der möglichen Fehlerquoten $W(\Theta_i)$ mit $i = 1, 2, \ldots, N$ der Wert $\frac{1}{N}$ bzw. unter Beachtung der obigen Begründung zur Einschränkung des möglichen Bereichs für den Fehleranteil auf höchstens 10% ($0 \leq \Theta_i \leq 0,1$): $W(\Theta_i) = \frac{1}{0,1 \cdot N}$. Setzt man diesen Wert anstelle der A-priori-Wahrscheinlichkeit in das Bayessche Theorem in der Form (3-14) ein, ergibt sich:

$$(3\text{-}15) \qquad W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j) = \sum_{j=1}^{c} \frac{\frac{1}{0,1 \cdot N} \cdot \frac{1}{x!} \cdot n \cdot \Theta_i^x \cdot e^{-n \cdot \Theta_i}}{\sum_{i=1}^{0,1N} \frac{1}{0,1 \cdot N} \cdot n \cdot \Theta_i^x \cdot e^{-n \cdot \Theta_i}}.$$

Das Bayessche Theorem in der Form (3-15) kann nun dazu benutzt werden, eine Entscheidung über die Ordnungsmäßigkeit eines Prüfungsfeldes zu treffen, indem der Prüfer zunächst eine Stichprobe mit x fehlerhaften Buchungen zieht und dann mit Hilfe der Formel (3-15) die Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß unter der Voraussetzung des beobachteten Stichprobenergebnisses der Anteil fehlerhafter Buchungen in dem betreffenden Prüfungsfeld eine bestimmte Fehlerquote Θ_c nicht übersteigt. Zur Verdeutlichung der prüferischen Vorgehensweise möge das bereits in Abschnitt 3-2 verwendete Beispiel dienen. Dabei ergab eine Stichprobe vom Umfang $n = 100$ aus den $N = 10.000$ Buchungen der Kreditorenbuchhaltung $x = 2$ Fehler. Zur Schätzung des unbekannten Fehleranteils der Kre-

---

1 Dieser Ansatz zur Lösung von Schätzproblemen unbekannter Fehleranteile von Prüfungsfeldern wird von Tracy als klassischer Lösungsansatz bezeichnet. "Classical statistics assume that any state of nature is as likely to be the true state on condition of the population as any state." John A. Tracy: Bayesian Statistical Methods in Auditing. In: Acc. Rev., Vol. XLIV (1969), S. 94.

ditorenbuchhaltung lassen sich nun mit Hilfe des Bayesschen Theorems folgende zwei Fragestellungen beantworten:

(1) Wie groß ist bei Vorgabe einer bestimmten Sicherheitswahrscheinlichkeit die Fehlerquote des betreffenden Prüfungsfeldes höchstens?

(2) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß in dem betreffenden Prüfungsfeld eine bestimmte kritische Fehlerquote Θ_c nicht überschritten wird?

Zur Beantwortung dieser Fragen empfiehlt sich die Aufstellung einer Tabelle der Art wie die folgende Tabelle 3-1. Diese zeigt in der Spalte (1) die möglichen Fehlerquoten, deren Bereich von 0 bis 0,1 mit der Begründung geht, daß bei praktischen Unternehmensprüfungen äußerst selten Fehlerquoten von mehr als 10% zu beobachten sind. Die vorgenommene Unterteilung der Fehlerquoten auf 0,1% erscheint für den Zweck einer Prüfung ausreichend und rechtfertigt noch den Ansatz einer diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung für Θ_i. In der Spalte (2) werden den Fehlerquoten die A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$ zugeordnet, die bei der hier zunächst vorgenommenen Unterstellung einer Gleichverteilung alle den gleichen Wert von $W(\Theta_i) = \frac{1}{0,1 \cdot N} = \frac{1}{0,1 \cdot 10.000} = 0,001$ haben. Bei den in der Spalte (3) aufgeführten Likelihoods $W(x_j/\Theta_i)$ handelt es sich um die bedingten Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten des beobachteten Stichprobenergebnisses x_j unter der Voraussetzung, daß in dem Prüfungsfeld jeweils eine bestimmte Fehlerquote Θ_i tatsächlich vorliegt. Die Ermittlung der Likelihoods erfolgt gemäß der Formel (3-15) mittels einer Poissonverteilung mit $\mu = n \cdot \Theta_i$. Da der Stichprobenumfang n und die möglichen Fehlerquoten Θ_i bekannt sind, ist lediglich der jeweilige μ-Wert zu berechnen und die Likelihoods für x_j aus einer Tabelle der Poissonverteilung abzulesen.[1]

---

1 Vgl. Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 86 ff. Neben dem Vorteil der vollständigen Vertafelung bietet die Poissonverteilung den Vorteil der Unabhängigkeit von N, so daß der Umfang des Prüfungsstoffs keinen Einfluß auf die Likelihoods ausübt.

Tabelle 3-1[1)]

Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei x = 2 und unterstellter Gleichverteilung der $W(\Theta_i)$

Fehler-quote	A-priori-Wahrsch.	Likeli-hoods	gemeinsame Wahrsch.	A-posteriori-Wahrsch.	kumulierte A-posteriori-W.
Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,000	0,001	0,0000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,001	0,001	0,0045	0,0000045	0,0004511	0,0004511
0,002	0,001	0,0164	0,0000164	0,0016442	0,0020953
0,003	0,001	0,0333	0,0000333	0,0033386	0,0054339
0,004	0,001	0,0536	0,0000536	0,0053738	0,0108077
...	...	...	...	...	...
0,040	0,001	0,1465	0,0001465	0,0146875	0,7712046
...	...	...	...	...	...
0,051	0,001	0,0793	0,0000793	0,0079503	0,8897913
0,052	0,001	0,0746	0,0000746	0,0074791	0,8972704
0,053	0,001	0,0701	0,0000701	0,0070280	0,9042984
0,054	0,001	0,0659	0,0000659	0,0066069	0,9109053
0,055	0,001	0,0618	0,0000618	0,0061958	0,9171011
0,056	0,001	0,0580	0,0000580	0,0058149	0,9229190
0,057	0,001	0,0544	0,0000544	0,0054540	0,9283700
0,058	0,001	0,0509	0,0000509	0,0051031	0,9334731
...	...	...	...	...	...
0,061	0,001	0,0417	0,0000417	0,0041808	0,9469076
0,062	0,001	0,0390	0,0000390	0,0039011	0,9508087
0,063	0,001	0,0364	0,0000364	0,0036495	0,9544582
...	...	...	...	...	...
0,070	0,001	0,0223	0,0000223	0,0022358	0,9740189
...	...	...	...	...	...
0,075	0,001	0,0156	0,0000156	0,0015640	0,9830927
...	...	...	...	...	...
0,080	0,001	0,0107	0,0000107	0,0010730	0,9893797
0,081	0,001	0,0100	0,0000100	0,0010027	0,9903820
...	....	...	...	...	...
0,085	0,001	0,0074	0,0000074	0,0007420	0,9937014
...	...	...	...	...	...
0,090	0,001	0,0050	0,0000050	0,0005013	0,9966395
...	...	...	...	...	...
0,095	0,001	0,0034	0,0000034	0,0003410	0,9986459
0,096	0,001	0,0031	0,0000031	0,0003109	0,9989568
0,097	0,001	0,0029	0,0000029	0,0002909	0,9992477
0,098	0,001	0,0027	0,0000027	0,0002708	0,9995195
0,099	0,001	0,0025	0,0000025	0,0002508	0,9997693
0,100	0,001	0,0023	0,0000023	0,0002307	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,0099745	1,0000000	•

1 Bei der Tabelle 3-1 wurde auf eine vollständige Darstellung aller Zwischenwerte für Θ_i verzichtet, um den Leser nicht durch eine Fülle von Zahlen zu ermüden. Stattdessen sind nur die von der Aussagegenauigkeit und -sicherheit her interessanten Werte aufgeführt.

Die Spalte (4) dient der Berechnung der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$; diese geben an, mit welcher Wahrscheinlichkeit sich sowohl eine bestimmte Fehlerquote Θ_i als auch das beobachtete Stichprobenergebnis x_j bei Vorliegen von Θ_i ergeben. Zur Ermittlung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten sind nach dem Bayesschen Theorem die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten jeweils durch ihre Summe zu dividieren. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i/x_j)$ sind in der Spalte (5) aufgeführt. In der Spalte (6) werden die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Spalte (5) kumuliert als A-posteriori-Verteilungsfunktion $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$ angegeben.

Die prüferische Auswertung der Tabelle 3-1 kann folgendermaßen vorgenommen werden: Bei Vorgabe einer bestimmten Sicherheitswahrscheinlichkeit liest der Prüfer den von ihm gewünschten Sicherheitsgrad $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$ in der Spalte (6) ab; der dazugehörige Θ_i-Wert der Spalte (1) gibt ihm dann die bei dieser Aussagesicherheit zu erwartende Fehlerhöchstgrenze an. Wird dagegen eine kritische Fehlerquote vorgegeben, ermittelt der Prüfer den entsprechenden Θ_c-Wert in der Spalte (1) und liest in der Spalte (6) die dazugehörige Aussagesicherheit ab. Für unser Beispiel bedeutet das, daß der Prüfer bei Wahl einer 90%igen Aussagesicherheit die Spalte der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten absucht, bis er seinen kritischen Wahrscheinlichkeitswert von etwa 90% gefunden hat. Der exakte Wert der Tabelle 3-1 ergibt eine Aussagesicherheit von 0,9042984; dieser Wahrscheinlichkeit entspricht eine Fehlerhöchstgrenze in der Spalte (1) von 0,053. Diesen Tatbestand würde der Prüfer dann in seinem Prüfungsbericht etwa wie folgt formulieren: "Eine Überprüfung der Kreditorenbuchhaltung in Form einer Zufallsstichprobe vom Umfang n = 100 ergab x = 2 fehlerhafte Buchungen. Aus diesem Ergebnis kann geschlossen werden (vgl. statistischen Anhang), daß das Prüfungsfeld mit 90%iger Sicherheit nicht mehr als 5,3% Fehler aufweist."

Sollte es sich dagegen um ein sehr wichtiges Prüfungsfeld handeln, dürfte eine Aussagesicherheit von 90% nicht mehr ausreichend sein.[1] Je nach der Bedeutung des Prüfungsfeldes müßte der Prüfer dann eine 95- oder 99%ige Sicherheit wählen. Diesen kritischen Sicherheitsgraden entsprechen in der Tabelle 3-1 die Fehlerhöchstgrenzen von 6,2% und 8,1%.[2] Damit ist zwar die Aussagesicherheit gestiegen, die Aussagegenauigkeit von 6,2% oder 8,1% ist aber nicht mehr groß genug, besonders dann nicht, wenn es sich um ein Prüfungsfeld mit wertmäßig relativ hohen Beträgen handelt. Daher soll im folgenden geprüft werden, ob durch den Ansatz von subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten sich nicht bessere Ergebnisse erzielen lassen.[3]

Während in der Klassischen Statistik ausschließlich das Ergebnis einer Stichprobe dazu dient, Schlußfolgerungen über den unbekannten Parameter der Untersuchungsgesamtheit zu ziehen, läßt das Konzept der Bayesschen Entscheidungslehre durchaus den Gebrauch von quantifizierbaren subjektiven Wahrscheinlichkeiten zu. Besonders im Bereich von Unternehmensprüfungen ist eine Stichprobe nicht die einzige Informationsquelle des Prüfers. Vielmehr wird der Prüfer bereits vor Beginn der Stichprobenerhebung eine Meinung über das zu prüfende Unternehmen haben, die dann im nachhinein durch das Stichprobenergebnis entweder bestätigt wird oder revidiert werden muß. Bei Anwendung der Methoden der Klassischen Statistik besteht jedoch keine Möglichkeit, eine solche Meinung des Prüfers zu berücksichtigen.

---

1 Eindeutige Regeln für die Wahl von Sicherheitsgraden gibt die Literatur nicht; stattdessen wird auf die Bedeutung der jeweiligen Prüfungsfelder verwiesen, wobei Sicherheitsgrade von 90% bis 99% angegeben werden. Vgl. u.a. J. C. Ray: Classification of Audit Evidence. In: JofA, Bd. 117 (1964), S. 42 - 47.

2 Im Vergleich zu dem in Abschnitt 3-2 aufgestellten Konfidenzintervall, das eine Fehlerobergrenze von 8,4% aufwies, ergibt sich hier für den gleichen Sicherheitsgrad eine nur unwesentlich größere Genauigkeit von 8,4%-8,1%=0,3%. Eine größere Genauigkeit läßt sich erst bei subjektiven $W(\Theta_1)$ erzielen.

3 Ohne weiteres lassen sich auch Tabellen für andere Stichprobenergebnisse (x=0, x=1, x=3 usw.) aufstellen.

Es erscheint auch wenig einsichtig, für die A-priori-Wahrscheinlichkeiten eine Gleichverteilung anzunehmen. Bezogen auf unser Beispiel dürfte es wenig "richtig" und "logisch" sein, einem Fehleranteil von $\Theta = 0,01$ die gleiche Wahrscheinlichkeit wie einem Fehleranteil von $\Theta = 0,1$ zuzuordnen. Hinzu kommt, daß der Ansatz einer Gleichverteilung als A-priori-Verteilung sich im Bayesschen Theorem als mathematisch überflüssig erweist. Diese Tatsache wird deutlich, wenn man nur zwei Ereignisse A_1 und A_2 betrachtet, die den Ereignisraum erschöpfend und sich gegenseitig ausschließend darstellen. Beiden Ereignissen wird die gleiche Wahrscheinlichkeit zugeordnet: $W(A_1) = W(A_2) = W(A)$. Die Wahrscheinlichkeit für ein Stichprobenergebnis x unter der Voraussetzung A_1 oder A_2 sei $W(x/A_1)$ bzw. $W(x/A_2)$. Damit ergibt sich die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit nach dem Bayesschen Theorem wie folgt:

$$(3\text{-}16) \qquad W(A_1/x) = \frac{W(A) \cdot W(x/A_1)}{W(A) \cdot W(x/A_1) + W(A) \cdot W(x/A_2)} \; .$$

Aus (3-16) läßt sich W(A) kürzen, so daß sich (3-16) zu (3-17) vereinfacht

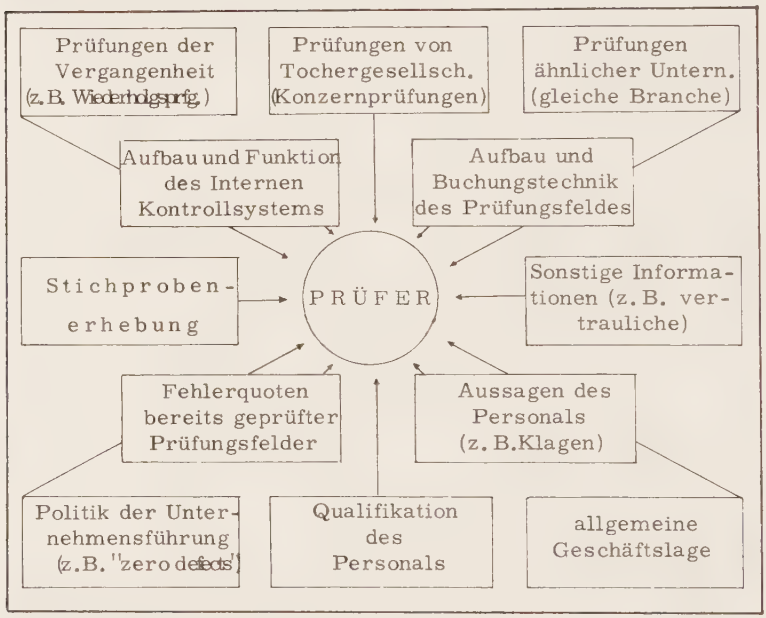
$$(3\text{-}17) \qquad W(A_1/x) = \frac{W(x/A_1)}{W(x/A_1) + W(x/A_2)} \; .$$

Der obige Beweis zeigt, daß die Annahme einer Gleichverteilung als A-priori-Verteilung auch vom mathematischen Standpunkt wenig sinnvoll ist; denn im Falle einer Gleichverteilung bestimmen die Likelihoods die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten allein. Damit wird auch das einzige Argument, das für den Ansatz einer Gleichverteilung spricht, die Neutralität dieser Vorgehensweise gegenstandslos. Aus diesen sachlichen und mathematischen Einwänden gegen eine Gleichverteilung folgt die Notwendigkeit, den Prüfer zur Quantifizierung seiner Erfahrungen und Einschätzungen über das zu prüfende Unternehmen in Form von subjektiven Wahrscheinlichkeiten zu bewegen. Dazu

dürfte es sinnvoll sein, zunächst die dem Prüfer offenstehenden Informationsquellen, die er zur Schätzung seiner subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten heranziehen könnte, zu analysieren. Die folgende Abbildung 3-3 möge diese Informationsquellen bildhaft darstellen.

Abbildung 3-3

Die Informationsquellen des Prüfers



Welche Schlußfolgerungen über die Höhe des unbekannten Fehleranteils eines Prüfungsfeldes der Prüfer aus den Informationsquellen der Abbildung 3-3 ziehen kann, möge das folgende Beispiel zeigen: Anläßlich der Jahresabschlußprüfung ist im Rahmen der Überprüfung der Gewinnermittlung der Posten "Abschreibungen" zu prüfen. Es handelt sich um eine Wiederholungsprüfung, so daß der Prüfer aufgrund der Abschlußprüfungen der Vergangenheit über die damals aufgetretenen Fehler informiert ist. Die Fehlerquote bei den Abschreibungen lag in der Vergangenheit - nicht zuletzt wegen eines reibungslos funktionierenden Internen Kontrollsystems - bei Werten zwischen 1% und 3%.

Bereits geprüfte Prüfungsfelder wie Kreditoren- oder Lagerbuchhaltung weisen einen gegenüber der Vergangenheit geringfügig günstigeren Fehleranteil auf. Jedoch läßt der Übergang auf ein anderes Abschreibungsverfahren, verbunden mit einem Personalwechsel, den Prüfer auf einen eventuell höheren Fehleranteil schließen. In dieser Meinung wird er bestärkt durch wiederholte Klagen des Personals, mit dem neuen Abschreibungsverfahren Schwierigkeiten zu haben. Außerdem weiß er aufgrund der Prüfung eines Konkurrenzunternehmens, daß die Gewinnsituation der Branche für die Prüfungsperiode außergewöhnlich gut war, wobei auch das zu prüfende Unternehmen keine Ausnahme macht. Da er den Ausweis eines möglichst gleichmäßigen Gewinns als ein Ziel der Unternehmenspolitik kennt, vermutet er, daß vielleicht ein Teil der Gewinne in besonders hohen Abschreibungen als stille Reserve versteckt werden soll. Nach abschließender Würdigung aller dieser und ähnlicher Informationen kommt der Prüfer zu dem Schluß, daß der Anteil fehlerhafter Buchungen bei den Abschreibungen etwas höher sein dürfte als in der Vergangenheit.

Eine solche Aussage wie in diesem Beispiel ist aber praktisch wertlos. Was bedeutet ein höherer Fehleranteil? 10%, 20%, 50% oder gar 100% mehr Fehler als in der Vergangenheit? Selbst wenn der Prüfer einen genauen Prozentsatz angeben könnte, bleibt immer noch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit, die er diesem Fehleranteil beimißt, offen.

Wie aber aus der Formel (3-14) hervorgeht, ist zur Berechnung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten die Bestimmung konkreter Werte für die A-priori-Wahrscheinlichkeiten unumgänglich. In der Frage der Quantifizierung subjektiver Glaubwürdigkeiten liegt jedoch das Hauptproblem der Bayesschen Entscheidungslehre. Die Diskussion dieses Problems soll aber hier nicht vor-

weggenommen werden, da sie in einem späteren Abschnitt 7-1 ausführlich erfolgt. Stattdessen soll ein praktikables Verfahren vorgeschlagen werden, mit dem der Prüfer in der Lage sein dürfte, seine Mutmaßungen zu quantifizieren. Für unser Ausgangsbeispiel, Prüfung der Kreditorenbuchhaltung, gibt die folgende Tabelle 3-2 das Ergebnis dieses Zuordnungsverfahrens wieder, das auf der Überlegung fußt, daß die Bestimmung subjektiver Wahrscheinlichkeiten ausgehend von der leichter abzuschätzenden Verteilungsfunktion einfacher ist.

Tabelle 3-2

Bestimmung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten mittels der Verteilungsfunktion

mögliche Fehlerquote	kumulierte subj. Wahrsch.	ursprüngliche subj. Wahrsch.
Θ_i	$W_{cum}(\Theta_i)$	$W(\Theta_i)$
(1)	(2)	(3)
0,005	0,600	0,600
0,010	0,800	0,200
0,020	0,850	0,050
0,030	0,900	0,050
0,040	0,950	0,050
0,050	0,960	0,010
0,060	0,970	0,010
0,070	0,980	0,010
0,080	0,990	0,010
0,090	0,995	0,005
0,100	1,000	0,005
Σ	•	1,000

Die Tabelle 3-2 zeigt in der Spalte (1) die Fehlerquoten Θ_i, denen die in der Spalte (3) aufgeführten subjektiven Wahrscheinlichkeiten zugeordnet wurden. Die Werte der Spalte (2) geben die vom Prüfer geschätzten kumulierten subjektiven Wahrscheinlichkeiten wieder. Hier eine ebenso feine Aufgliederung der Θ_i-Werte wie in der Tabelle 3-1 vorzunehmen, dürfte das Zuordnungsverfahren erheblich erschweren, weil der Unterschied zwischen einem Fehleranteil von z.B. 0,10 und 0,12 nicht so groß ist, daß der Prüfer beiden Werten eine jeweils unterschiedliche Wahrscheinlichkeit zuordnen kann.

Vor der eigentlichen Zuordnung numerischer Wahrscheinlichkeitsurteile ist zunächst eine Schätzung des möglichen Fehlerbereichs erforderlich. Für unser Beispiel ergab sich dabei eine Spanne von 0% bis 10%. Dabei ist es wichtig, daß der Prüfer dem geschätzten Bereich insgesamt eine Wahrscheinlichkeit von 1 beimißt, da sonst die Voraussetzung des Bayesschen Theorems, die Ereignisse Θ_i sollen den Ereignisraum erschöpfend darstellen, nicht erfüllt ist. Diese Forderung versteht sich auch von selbst, wenn man bedenkt, daß der Prüfer bei der Abschätzung des möglichen Fehlerbereichs darüberhinausgehende Fehlerquoten für unmöglich hält. Der tatsächliche Fehleranteil liegt also für ihn mit Sicherheit in dem von ihm geschätzten Bereich, und die Wahrscheinlichkeit für ein sicheres Ereignis ist definitionsgemäß gleich 1. Um zu vermeiden, daß das Stichprobenergebnis selbst wieder einen Einfluß auf die Schätzung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten ausübt, sollte die beabsichtigte Stichprobe erst nach der Quantifizierung der Glaubwürdigkeiten gezogen werden.

Wie bereits erwähnt, empfiehlt es sich bei der numerischen Bestimmung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten, das Problem aus der Sicht kumulativer Glaubwürdigkeiten zu lösen; denn der Prüfer wird eher in der Lage sein, die Wahrscheinlichkeit dafür auszudrücken, daß ein bestimmter Fehleranteil nicht überschritten wird, als daß ein bestimmter Fehleranteil eine exakte Wahrscheinlichkeit von x% besitzt.[1] Dazu sollte der Prüfer zunächst den Fehleranteil festlegen, von dem er annimmt, daß dieser in dem betreffenden Prüfungsfeld mit sehr großer Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird. Damit ist dieser Fehleranteil Ausgangspunkt aller weiteren Wahrscheinlichkeitszuordnungen. Daran anschließend sind die kumulierten Wahrscheinlichkeiten für die Fehlerquoten zu bestimmen, die unter und über dem zuerst festgelegten Fehleranteil liegen. Durch Subtraktion der kumulierten Wahrscheinlichkeiten erhält man schließlich die ursprünglichen subjektiven Wahrscheinlichkeiten.

---

1 Vgl. William H. Kraft, jr.: Statistical Sampling for Auditors: A New Look. In: JofA, Bd. 125/126 (1968), S. 50 f.

In unserem Beispiel möge der Prüfer mit ziemlich großer Wahrscheinlichkeit glauben, daß der Anteil fehlerhafter Buchungen der Kreditorenbuchhaltung nicht größer als 3% ist. Deshalb schätzt er die Wahrscheinlichkeit für eine Fehlerquote bis zu 3% als 0,9; vice versa heißt das, er räumt der Möglichkeit, daß die Fehlerquote höher als 3% ist eine Wahrscheinlichkeit von 0,1 ein. In einem nächsten Schritt bestimmt der Prüfer die kumulierten Wahrscheinlichkeiten für die Fehlerquoten, die unter und über 3% liegen. Hier sei angenommen, daß bei Prüfungen in der Vergangenheit wegen des guten Funktionierens des Internen Kontrollsystems[1] die Fehlerquote selten über 1% lag. Aufgrund dieser Information nimmt der Prüfer mit 80%iger Sicherheit an, daß die Fehlerquote auch dieses Mal nicht höher sein dürfte. Einem 0,5%igen Fehleranteil ordnet er die kumulierte Wahrscheinlichkeit von 0,6 zu, weil er glaubt, daß die Chance, bis zu fünfzig Fehler in diesem Prüfungsfeld bei einer Vollprüfung zu finden, etwas größer als 0,5 ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß trotz seiner positiven Meinung über die Höhe des Fehleranteils dieser dennoch größer als 4% ist, schätzt der Prüfer auf 5%; damit hält er eine Fehlerquote von nicht mehr als 4% mit 0,95 für wahrscheinlich. Einen höheren Fehleranteil als 8% schließlich glaubt er mit nur 1%iger Irrtumswahrscheinlichkeit ablehnen zu können; das bedeutet, die kumulierte Wahrscheinlichkeit, einen Fehleranteil bis zu 8% zu finden, beträgt 0,99. Bei der Zuordnung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die restlichen Fehlerquoten von 2%, 5%, 6%, 7% und 9% könnte ähnlich vorgegangen werden. Zur Vereinfachung des Beispiels sei jedoch angenommen, daß der Prüfer diesen Fehlerquoten explizit keine Wahrscheinlichkeiten zuordnen kann. Diese Prämisse dürfte auch wirklichkeitsnah sein, da die Grenze der Unterscheidungsfähigkeit zwischen eng beieinander liegenden subjektiven Wahrscheinlichkeiten häufig schnell erreicht ist.

---

1 Bei der Kontrolle handelt es sich ebenfalls um eine Überwachung des Unternehmensgeschehens, die sich jedoch als fest eingebaute Einrichtung zeitlich parallel zum Unternehmensablauf vollzieht.

Aufgrund der so kumuliert angegebenen Wahrscheinlichkeiten lassen sich durch Subtraktion die ursprünglichen subjektiven Wahrscheinlichkeiten für die Fehlerquoten ohne Schwierigkeiten ermitteln. Um z.B. die ursprüngliche subjektive Wahrscheinlichkeit für $\Theta = 0,01$ zu erhalten, subtrahiert man von der kumulierten Wahrscheinlichkeit für $\Theta = 0,01$, die der Prüfer mit 80% geschätzt hatte, die kumulierte Wahrscheinlichkeit für $\Theta = 0,005$, die 60% betrug. Die Differenz von 20% ergibt die ursprüngliche subjektive Wahrscheinlichkeit für $\Theta = 0,01$. Bei den Fehlerquoten, denen keine kumulierten subjektiven Wahrscheinlichkeiten zugeordnet wurden, lassen sich durch lineares Interpolieren die ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten gewinnen. So beträgt z.B. die kumulierte Wahrscheinlichkeit für $\Theta = 0,08$ 99%. Davon ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit von $\Theta = 0,04$ mit 95% zu subtrahieren.Die Differenz von 4% ist dann gleichmäßig auf die Fehlerquoten $\Theta = 0,05$ bis $\Theta = 0,08$ mit jeweils 1% aufzuteilen. Analog dazu kann man vorgehen, um jeder einzelnen Fehlerquote Θ_i der Tabelle 3-1 bzw. 3-4 eine numerische A-priori-Wahrscheinlichkeit beizumessen. So verteilt sich z.B. die kumulierte Wahrscheinlichkeit von 60% für $\Theta = 0,005$ auf die Fehlerquoten $\Theta = 0$, $\Theta = 0,001$, ..., $\Theta = 0,005$, deren A-priori-Wahrscheinlichkeiten somit jeweils 10% betragen.

Die so gewonnenen A-priori-Wahrscheinlichkeiten ersetzen die Gleichwahrscheinlichkeiten der Spalte (2) der Tabelle 3-1 in der folgenden Tabelle 3-4. Aus dieser Tabelle ist ersichtlich, daß sich bei gleicher Irrtumswahrscheinlichkeit die dazu gehörenden Fehlerhöchstgrenzen, verglichen mit den entsprechenden Werten der Tabelle 3-1, erheblich nach unten verschoben haben. Die folgende Tabelle 3-3 faßt für die wichtigsten Aussagesicherheiten die entsprechenden Fehlerhöchstgrenzen zusammen.

Tabelle 3-3

Fehlerhöchstgrenzen bei subjektiven und gleichverteilten $W(\Theta_i)$

$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$	90%	95%	98%	99%
subjektive $W(\Theta_i)$	0,033	0,038	0,045	0,055
gleiche $W(\Theta_i)$	0,053	0,063	0,075	0,081

Tabelle 3-4[1)]

Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei x = 2 und unterstellten subjektiven $W(\Theta_i)$

Fehler-quote	A-priori-Wahrsch.	Likeli-hoods	gemeinsame Wahrsch.	A-posteriori-Wahrsch.	kumulierte A-posteriori-W.
Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,000	0,1000	0,0000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,001	0,1000	0,0045	0,0004500	0,0054177	0,0054177
0,002	0,1000	0,0164	0,0016400	0,0195813	0,0249990
0,003	0,1000	0,0333	0,0033300	0,0400849	0,0658138
0,004	0,1000	0,0536	0,0053600	0,0645204	0,1296043
0,005	0,1000	0,0758	0,0075800	0,0912430	0,2208473
...	...	...	...	...	...
0,010	0,0400	0,1839	0,0074560	0,0885466	0,5641052
...	...	...	...	...	...
0,020	0,0050	0,2707	0,0013530	0,0162872	0,7128822
...	...	...	...	...	...
0,030	0,0050	0,2240	0,0011200	0,0134827	0,8639947
...	...	...	...	...	...
0,033	0,0050	0,2008	0,0010040	0,0120863	0,9016620
...	...	...	...	...	...
0,037	0,0050	0,1692	0,0008460	0,0101843	0,9452403
0,038	0,0050	0,1615	0,0008075	0,0097150	0,9549553
0,039	0,0050	0,1539	0,0007695	0,0092575	0,9642128
0,040	0,0050	0,1465	0,0007325	0,0088121	0,9730249
0,041	0,0010	0,1393	0,0001393	0,0016777	0,9747026
...	...	...	...	...	...
0,045	0,0010	0,1125	0,0001125	0,0013551	0,9805925
...	...	...	...	...	...
0,050	0,0010	0,0842	0,0000842	0,0010145	0,9864046
...	...	...	...	...	...
0,055	0,0010	0,0618	0,0000618	0,0007447	0,9906297
...	...	...	...	...	...
0,060	0,0010	0,0446	0,0000446	0,0005377	0,9937108
...	...	...	...	...	...
0,070	0,0010	0,0223	0,0000223	0,0002694	0,9974777
...	...	...	...	...	...
0,080	0,0010	0,0107	0,0000107	0,0001296	0,9993295
...	...	...	...	...	...
0,090	0,0005	0,0050	0,0000025	0,0000310	0,9997729
...	...	...	...	...	...
0,098	0,0005	0,0027	0,0000014	0,0000166	0,9999702
0,099	0,0005	0,0025	0,0000013	0,0000154	0,9999856
0,100	0,0005	0,0023	0,0000012	0,0000144	1,0000000
$\sum$	1,0000	•	0,0830760	1,0000000	•

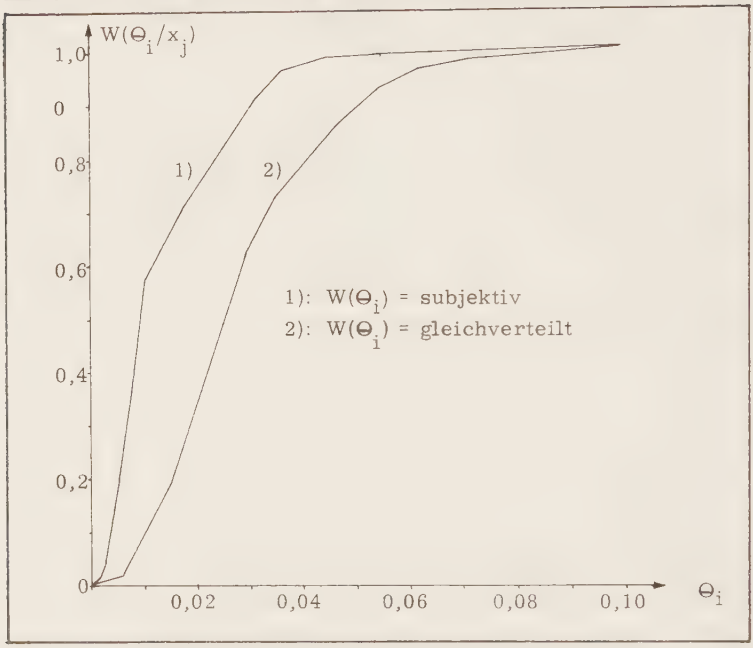
1 Aus Gründen der Übersicht wird bei der Tabelle 3-4 ebenso wie bei der Tabelle 3-1 auf eine vollständige Aufzählung aller Θ_i-Werte verzichtet.

Diese Ergebnisse zeigen, daß der Prüfer bei Auswertung aller ihm zur Verfügung stehenden Informationsquellen seine Urteilsgenauigkeit bei gleicher Aussagesicherheit nicht unerheblich erhöhen kann.

In der folgenden Abbildung 3-4 werden die A-posteriori-Verteilungsfunktionen $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei unterstellter Gleichverteilung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten (Werte der Tabelle 3-1) und bei subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten (Werte der Tabelle 3-4) einander gegenübergestellt. Dabei zeigt sich, daß die Verteilungsfunktion bei gleichverteilten A-priori-Wahrscheinlichkeiten (Kurve 2) bis zu einer Fehlerquote von etwa 6% wesentlich unter der Verteilungsfunktion bei subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten (Kurve 1) verläuft. Da die A-posteriori-Verteilungsfunktion die Aussagesicherheit hinsichtlich der zu erwartenden Fehlerhöchstgrenze wiedergibt, ist aus dem Verlauf der beiden Kurven ebenfalls zu entnehmen, daß bei subjektiver Schätzung die Aussagegenauigkeit wesentlich größer ist als bei gleichverteilten A-priori-Wahrscheinlichkeiten. Die Begründung für den Verlauf der Kurve 1 liegt darin, daß bei subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten das günstige Stichprobenergebnis von $x = 2$ durch eine sehr günstige Schätzung der zu erwartenden Fehlerquoten unterstützt wird. Bei einer weniger günstigen Einschätzung des betreffenden Prüfungfeldes würde der Verlauf der Kurve 1 sich dem der Kurve 2 nähern, womit gleichzeitig bei der gleichen kritischen Fehlerquote die Aussagesicherheit sinken würde. Welchen Einfluß im einzelnen die Güte der Schätzung auf die Aussagesicherheit ausübt, wird noch im Verlauf dieses Abschnitts anhand einer Sensibilitätsanalyse überprüft.

Abbildung 3-4

A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei subjektiven und gleichverteilten A-priori-Wahrscheinlichkeiten für x =2



Obwohl die Ergebnisse unseres Beispiels eindeutig für die Anwendung des Bayesschen Theorems mit subjektiven Wahrscheinlichkeiten sprechen, erheben sich doch Zweifel an den diesem Beispiel zugrunde liegenden Modellvoraussetzungen, die in der Zuordnung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten auf die einzelnen möglichen Fehlerquoten des Prüfungsfeldes liegen. Es wurde angenommen, daß der Prüfer lediglich fünf Fehleranteilen eine kumulierte subjektive Wahrscheinlichkeit beimißt; für die dazwischen liegenden Fehlerquoten wurden dann die A-priori-Wahrscheinlichkeiten gewonnen, indem innerhalb des Bereichs zweier Fehlerquoten, denen der Prüfer eine subjektive Wahrscheinlichkeit zugeordnet hatte, eine Gleichverteilung vermutet wurde, so daß die vom Prüfer quantifizierte Wahrscheinlichkeit gleichmäßig auf die Θ_i-Werte aufgeteilt werden konnte. Gegen

diese Vorgehensweise sprechen aber die gleichen Argumente wie gegen den Ansatz einer Gleichverteilung über den gesamten Bereich der Fehleranteile. Wenn auch der Prüfer mit etwas Sorgfalt eine seiner subjektiven Einschätzung des Prüfungsfeldes entsprechende Interpolation vornehmen könnte, dürfte es ihm doch unmöglich sein, bei der feinen Aufgliederung der Fehlerquoten unseres Beispiels allen hundert Θ_i-Werten eine subjektive Wahrscheinlichkeit explizit zuzuordnen. Daher soll im folgenden geprüft werden, ob eine weniger feine Aufgliederung des möglichen Bereichs der Fehlerquoten nicht auch zu brauchbaren Ergebnissen führt. Zwar können so viele Θ_i-Werte vorkommen, wie sich aus dem Umfang der Untersuchungsgesamtheit N und der Menge fehlerhafter Buchungen M ergeben, jedoch dürfte bei der Abgabe eines Prüfungsurteils die Angabe der Fehlerhöchstgrenze bis zu einer Genauigkeit von 1% noch vertretbar sein. Deshalb soll die Zahl der Fehlerquoten auf zwölf Werte, die sich aus der Spalte (1) der folgenden Tabelle 3-5 ergeben, reduziert werden. Hierbei ist lediglich der Bereich unter $\Theta = 0,01$ noch feiner unterteilt, weil der Prüfer eher in der Lage sein dürfte, diesen Werten in seiner Unterscheidungsfähigkeit fühlbar unterschiedliche kumulierte subjektive Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Die hier vorgenommene Reduzierung der möglichen Fehlerquoten soll jedoch nicht bedeuten, daß damit alle anderen dazwischen liegenden Θ_i-Werte nicht vorkommen können. Vielmehr lassen die Fehlerquoten der Tabelle 3-5 sich auch als Mittelwerte von Intervallen interpretieren. Mit Hilfe des bereits weiter oben beschriebenen Verfahrens des Ansatzes kumulierter Glaubwürdigkeiten möge der Prüfer seinen Eindruck über das Prüfungsfeld "Kreditorenbuchhaltung" gemäß den Werten der Spalte (2) der folgenden Tabelle 3-5 quantifiziert haben.

Tabelle 3-5

Bestimmung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten mittels der Verteilungsfunktion bei weniger feiner Unterteilung der Fehlerquoten

mögliche Fehlerquote	kumulierte subj. Wahrsch.	ursprüngliche subj. Wahrsch.
Θ_i	$W_{cum}(\Theta_i)$	$W(\Theta_i)$
(1)	(2)	(3)
0,001	0,100	0,100
0,005	0,600	0,500
0,010	0,750	0,150
0,020	0,850	0,100
0,030	0,900	0,050
0,040	0,950	0,050
0,050	0,970	0,020
0,060	0,980	0,010
0,070	0,990	0,010
0,080	0,995	0,005
0,090	0,999	0,004
0,100	1,000	0,001
Σ	•	1,000

In der nun folgenden Tabelle 3-6 werden die in der Tabelle 3-5 angegebenen subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten zur Bestimmung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten verwendet, wobei die Berechnungen analog zu den Tabellen 3-1 und 3-4 verlaufen. Das Ergebnis der Tabelle 3-6 zeigt, daß sich durch eine weniger feine Aufgliederung der Θ_i-Werte ein nur unbedeutender Informationsverlust ergibt: Der Prüfer ist nun nicht mehr in der Lage, sich jeden beliebigen Aussagesicherheitsgrad als kritischen Sicherheitsgrad zu wählen. Die Einschränkung seiner Auswahlmöglichkeit erweist sich jedoch als ein wenig ins Gewicht fallender Mangel, wenn man berücksichtigt, daß diese Beschränkung hauptsächlich die unteren Sicherheitsgrade betrifft, die bei praktischen Unternehmensprüfungen doch nicht in Frage kommen. Wie aus der Spalte (6) der Tabelle 3-6 hervorgeht, ist der Bereich der oberen Sicherheitsgrade jedoch noch ausreichend genau differenziert.

Tabelle 3-6

Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ bei x = 2 und weniger feiner Aufteilung der Fehlerquoten Θ_i

Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,001	0,100	0,0045	0,0004500	0,0039488	0,0039488
0,005	0,500	0,0758	0,0379000	0,3325763	0,3365251
0,010	0,150	0,1839	0,0275850	0,2420612	0,5785863
0,020	0,100	0,2707	0,0270700	0,2375420	0,8161283
0,030	0,050	0,2240	0,0112000	0,0982811	0,9144094
0,040	0,050	0,1465	0,0073250	0,0642776	0,9786870
0,050	0,020	0,0842	0,0016840	0,0147773	0,9934643
0,060	0,010	0,0446	0,0004460	0,0039137	0,9973780
0,070	0,010	0,0223	0,0002230	0,0019568	0,9993348
0,080	0,005	0,0107	0,0000535	0,0004695	0,9998043
0,090	0,004	0,0050	0,0000200	0,0001755	0,9999798
0,100	0,001	0,0023	0,0000023	0,0000202	1,0000000
Σ	1,000	•	0,1139588	1,0000000	•

Aus der Spalte (6) der Tabelle 3-6 ist ersichtlich, daß der Sicherheitsgrad von 95% fehlt. Selbst wenn der Prüfer nun ausdrücklich sein Urteil mit 95%-iger Sicherheit abgeben will, dürfte der Umstand, daß er nun eine 97,87%ige Aussagesicherheit wählen muß, keinen negativen Einfluß auf die geforderte Sicherheit seines Prüfungsurteils ausüben, da sich der Sicherheitsgrad erhöht hat. Problematisch könnte es höchstens in dem Fall sein, wenn zufällig dann die gewünschte Genauigkeit überschritten würde. Hinsichtlich der Genauigkeit ergibt sich sonst auch kein wesentlicher Nachteil, wenn nunmehr die Fehlerhöchstgrenzen nur in ganzen Prozentzahlen angegeben werden können. Konnte der Prüfer bisher mit 95,49%iger Sicherheit 3,8% als Fehlerhöchstgrenze festsetzen, so ist seine jetzige Aussage, mit 97,87%iger Sicherheit nicht mehr als 4% Fehler zu finden sicher genau so wertvoll.[1]

1 Die Unterschiede bei den Fehlerhöchstgrenzen bei gleichem Sicherheitsgrad zwischen den Tabellen 3-4 und 3-6 sind durch den Ansatz geringfügig unterschiedlicher subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten bedingt.

Bislang erwies sich, daß die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre bei der Schätzung von Fehleranteilen auf Stichprobenbasis bei Unternehmensprüfungen zu brauchbaren Ergebnissen führt. Um hier jedoch die Problematik eines Induktionsschlusses zu umgehen, soll im folgenden anhand einer Sensibilitätsanalyse unser Ausgangsbeispiel so abgewandelt werden, daß jeweils ceteris paribus die A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$, das Stichprobenergebnis x und der Stichprobenumfang n variiert werden.

Nachdem der Ansatz einer Gleichverteilung als Ausdruck der Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Fehleranteilswerte als wenig begründbar verworfen wurde und stattdessen eine subjektive Schätzung der Wahrscheinlichkeiten a priori als zulässig erachtet wurde, soll im Rahmen der Sensibilitätsanalyse zunächst die Frage des Einflusses unterschiedlicher subjektiver Wahrscheinlichkeiten diskutiert werden. Dazu werden die Mutmaßungen des Prüfers so variiert, daß der Prüfer neben dem sehr günstigen Eindruck des Ausgangsbeispiels einmal einen günstigen, dann einen weniger günstigen und schließlich als Extremfall einen sehr ungünstigen Eindruck über das betreffende Prüfungsfeld haben möge. Die dazu gehörenden A-priori-Verteilungsfunktionen zeigt die folgende Abbildung 3-5. Die Auswirkungen unterschiedlicher A-priori-Schätzungen auf die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten sind der folgenden Tabelle 3-7 in Verbindung mit der Tabelle 3-6 (sehr günstige A-priori-Wahrscheinlichkeiten) zu entnehmen.

Die Ergebnisse der Tabellen 3-6 und 3-7 zeigen, daß die Auswirkungen selbst extrem unterschiedlicher Einschätzungen der möglichen Fehlerquoten eines Prüfungsfeldes auf die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei weitem nicht so groß sind, wie anfänglich vermutet werden mußte. Da hier eine Kombination verschiedener A-priori-Wahrscheinlichkeiten mit den Likelihoods eines

Abbildung 3-5

A-priori-Verteilungsfunktionen bei Variation der subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$ und x = 2

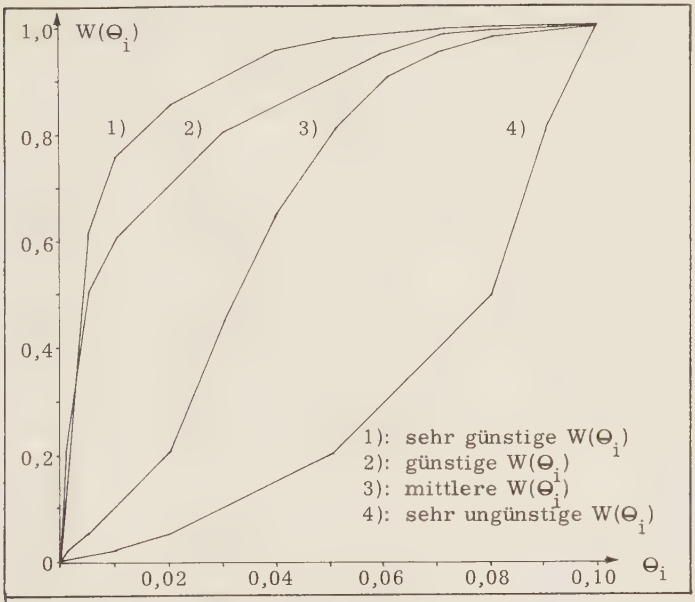


Abbildung 3-6

A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei Variation der subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$ und x = 2

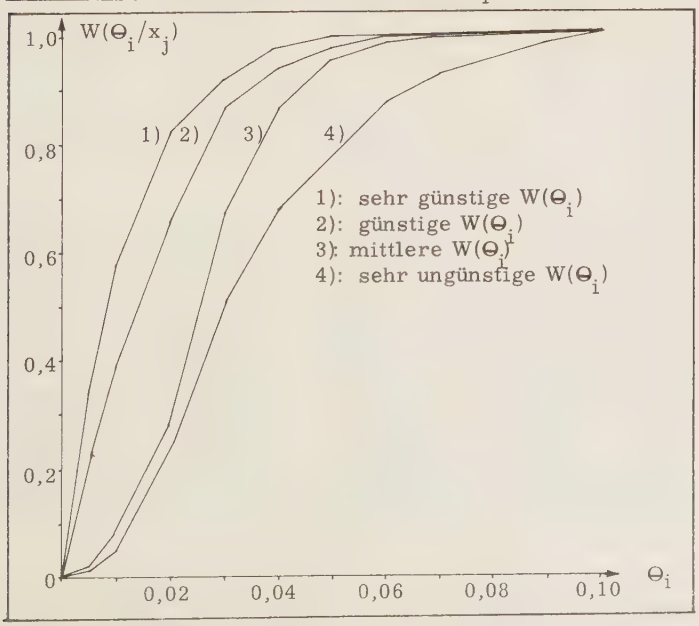


Tabelle 3-7

Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierenden A-priori-Wahrscheinlichkeiten für x = 2 und n = 100

Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \; \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
günstige $W(\Theta_i)$					
0,001	0,200	0,0045	0,0009000	0,0086480	0,0086480
0,005	0,300	0,0758	0,0227400	0,2185057	0,2271537
0,010	0,100	0,1839	0,0183900	0,1767072	0,4038609
0,020	0,100	0,2707	0,0270700	0,2601121	0,6639730
0,030	0,100	0,2240	0,0224000	0,2152388	0,8792118
0,040	0,050	0,1465	0,0073250	0,0703849	0,9495967
0,050	0,050	0,0842	0,0042100	0,0404534	0,9900501
0,060	0,050	0,0446	0,0002230	0,0021427	0,9921928
0,070	0,030	0,0223	0,0006690	0,0064284	0,9986212
0,080	0,010	0,0107	0,0001070	0,0010281	0,9996493
0,090	0,005	0,0050	0,0000250	0,0002402	0,9998895
0,100	0,005	0,0023	0,0000115	0,0001105	1,0000000
Σ	1,000	•	0,1040705	1,0000000	•
mittlere $W(\Theta_i)$					
0,001	0,020	0,0045	0,0000900	0,0006315	0,0006315
0,005	0,030	0,0758	0,0022740	0,0159547	0,0165862
0,010	0,050	0,1839	0,0091950	0,0645137	0,0810999
0,020	0,100	0,2707	0,0270700	0,1899275	0,2710274
0,030	0,250	0,2240	0,0560000	0,3929053	0,6639327
0,040	0,200	0,1465	0,0293000	0,2055737	0,8695064
0,050	0,150	0,0842	0,0126300	0,0886140	0,9581204
0,060	0,100	0,0446	0,0044600	0,0312921	0,9894125
0,070	0,050	0,0223	0,0011150	0,0078231	0,9972356
0,080	0,030	0,0107	0,0003210	0,0022522	0,9994878
0,090	0,010	0,0050	0,0000500	0,0003508	0,9998386
0,100	0,010	0,0023	0,0000230	0,0001614	1,0000000
Σ	1,000	•	0,1425280	1,0000000	•
ungünstige $W(\Theta_i)$					
0,001	0,005	0,0045	0,0000225	0,0010505	0,0010505
0,005	0,005	0,0758	0,0003790	0,0088470	0,0098975
0,010	0,010	0,1839	0,0018390	0,0429282	0,0528257
0,020	0,030	0,2707	0,0081210	0,1895702	0,2423959
0,030	0,050	0,2240	0,0112000	0,2614441	0,5038400
0,040	0,050	0,1465	0,0073250	0,1709890	0,6748290
0,050	0,050	0,0842	0,0042100	0,0982750	0,7731040
0,060	0,100	0,0446	0,0044600	0,1041107	0,8772147
0,070	0,100	0,0223	0,0022300	0,0520554	0,9292701
0,080	0,100	0,0107	0,0010700	0,0249772	0,9542473
0,090	0,300	0,0050	0,0015000	0,0350149	0,9892622
0,100	0,200	0,0023	0,0004600	0,0107378	1,0000000
Σ	1,000	•	0,0428165	1,0000000	•

relativ günstigen Stichprobenergebnisses (x = 2) erfolgt, ergibt sich für eine günstige Schätzung ein multiplikativer Effekt, der sich darin ausdrückt, daß sich schon für kleine Fehleranteilswerte relativ hohe A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten und damit große Aussagesicherheiten ergeben. Zwar werden mit zunehmend ungünstigeren Schätzungen auch die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten kleiner, jedoch greift hier das Ergebnis der Stichprobe korrigierend ein, so daß für eine Fehlerhöchstgrenze von 7% die Aussagesicherheit in allen Fällen mindestens 90% beträgt. Dieser Korrektureffekt ist gut durch einen Vergleich der Abbildungen 3-5 und 3-6 ersichtlich. Während die Kurven der A-priori-Verteilungsfunktionen für eine mittlere und schlechte Einschätzung (Funktionen 3 und 4) im Bereich kleiner Fehlerwerte relativ langsam steigen, sind die Steigungen der korrespondierenden A-posteriori-Verteilungsfunktionen anfänglich weitaus größer und unterscheiden sich nicht wesentlich von den Steigungen der Funktionen bei günstiger und sehr günstiger Einschätzung. Zum Vergleich der Auswirkungen der unterschiedlichen subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten auf die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten möge die folgende Tabelle 3-8, in der die wichtigsten Ergebnisse der Tabellen 3-6 und 3-7 zusammengefaßt sind, dienen.

Tabelle 3-8

Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenen Fehleranteil Θ_c bei Variation der A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W(\Theta_i)$.

Θ_c	Aussagesicherheit für Θ_c bei $W(\Theta_i)$:			
	sehr günstig	günstig	mittel	sehr ungünstig
1%	57,8%	40,4%	8,1%	5,3%
3%	91,4%	87,9%	66,4%	50,4%
5%	99,3%	99,0%	95,8%	77,3%
7%	99,9%	99,9%	99,7%	92,9%

Bei Betrachtung der Tabelle 3-8 zeigt sich, daß bei einer kritischen Fehlerquote von Θ = 1% die kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei unterschiedlichen Schätzungen noch

erheblich voneinander abweichen. Diese Differenzen nehmen aber mit steigenden Θ_i-Werten (=größere Ungenauigkeit des Prüfungsurteils) ab, so daß bei einer Fehlerhöchstgrenze von $\Theta = 5\%$ die Aussagesicherheiten der ersten drei A-priori-Schätzungen relativ eng zusammenliegen. Zwar ist bei dieser Fehlerquote die Differenz zwischen der sehr günstigen und der sehr ungünstigen Einschätzung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten mit ca. 22% ziemlich groß, jedoch ist zu berücksichtigen, daß es sich hier um zwei wirklich extreme Einschätzungen handelt, die in praxi selten vorliegen dürften. Damit bleibt festzuhalten, daß der Einfluß falscher A-priori-Wahrscheinlichkeiten keineswegs so bedeutend ist, wie er von den Kritikern der Bayesschen Entscheidungslehre gern dargestellt wird.

Zur weiteren Durchführung der Sensibilitätsanalyse soll geprüft werden, wie sich unterschiedliche Stichprobenergebnisse auf die günstigen subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten der Tabelle 3-6 auswirken. Dazu möge das Stichprobenergebnis neben dem Ausgangswert $x = 2$ die Werte $x = 1$, $x = 3$ und als Extremfall den Wert $x = 8$ annehmen. Eine Variation des Stichprobenergebnisses bedeutet, daß die Verteilung der Likelihoods mit $\mu = n \cdot \Theta$ erst bei einem höheren Fehleranteilswert ihr Maximum erreicht und einen zunehmend flacheren Verlauf aufweist, wenn die Zahl der in der Stichprobe gefundenen Falschbuchungen steigt.

Die Tabellen 3-6 und 3-9 geben die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei Vorliegen der obigen Stichprobenergebnisse wieder. Ebenso wie bei der Variation der subjektiven Wahrscheinlichkeiten ergibt sich bei Zusammentreffen einer günstigen A-priori-Wahrscheinlichkeit mit einem günstigen Stichprobenergebnis ein multiplikativer Effekt mit der Folge, daß sich bereits für relativ kleine Fehlerhöchstgrenzen relativ hohe A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ergeben.

Tabelle 3-9

Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierendem Stichprobenergebnis x_j für n = 100 und $W(\Theta_i)$ = sehr günstig

Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
x = 1					
0,001	0,100	0,0905	0,0090500	0,0354908	0,0254908
0,005	0,500	0,3033	0,1516500	0,5947167	0,6302075
0,010	0,150	0,3679	0,0551850	0,2164156	0,8466231
0,020	0,100	0,2707	0,0270700	0,1061588	0,9527819
0,030	0,050	0,1494	0,0074700	0,0292946	0,9820765
0,040	0,050	0,0733	0,0036650	0,0143729	0,9964394
0,050	0,020	0,0337	0,0006740	0,0026431	0,9990925
0,060	0,010	0,0149	0,0001490	0,0005844	0,9996769
0,070	0,010	0,0064	0,0000640	0,0002510	0,9999279
0,080	0,005	0,0027	0,0000135	0,0000530	0,9999809
0,090	0,004	0,0011	0,0000044	0,0000172	0,9999981
0,100	0,001	0,0005	0,0000005	0,0000019	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,2549954	1,0000000	•
x = 3					
0,001	0,100	0,0002	0,0000200	0,0003393	0,0003393
0,005	0,500	0,0126	0,0063000	0,1068482	0,1071975
0,010	0,150	0,0613	0,0091959	0,1559622	0,2631597
0,020	0,100	0,1804	0,0180400	0,3059877	0,5691474
0,030	0,050	0,2240	0,0112000	0,1899703	0,7591177
0,040	0,050	0,1954	0,0097700	0,1657151	0,9248328
0,050	0,020	0,1404	0,0028080	0,0476283	0,9724611
0,060	0,010	0,0892	0,0008920	0,0151297	0,9875908
0,070	0,010	0,0521	0,0005210	0,0088371	0,9964279
0,080	0,005	0,0286	0,0001430	0,0024255	0,9988534
0,090	0,004	0,0150	0,0000600	0,0010177	0,9998710
0,100	0,001	0,0076	0,0000076	0,0001289	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,0589575	1,0000000	•
x = 8					
0,001	0,100	0,0000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,005	0,500	0,0000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,010	0,150	0,0000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
0,020	0,100	0,0009	0,0000900	0,0129203	0,0129203
0,030	0,050	0,0081	0,0004050	0,0581412	0,0710615
0,040	0,050	0,0298	0,0014900	0,2139023	0,2849638
0,050	0,020	0,0653	0,0013060	0,1874874	0,4724512
0,060	0,010	0,1033	0,0010330	0,1482959	0,6207471
0,070	0,010	0,1304	0,0013040	0,1872004	0,8079475
0,080	0,005	0,1396	0,0006980	0,1002038	0,9081513
0,090	0,004	0,1318	0,0005272	0,0756841	0,9838354
0,100	0,001	0,1126	0,0001126	0,0161646	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,0069658	1,0000000	•

Je "schlechter" nun das Stichprobenergebnis ist, desto kleiner werden die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für relativ kleine Fehlerquoten, wodurch die Verteilungsfunktionen jeweils einen flacheren Verlauf nehmen. Diesen Zusammenhang zeigt die folgende Abbildung 3-7. Damit wird auch das Argument, sehr günstige Einschätzungen der A-priori-Wahrscheinlichkeiten könnten den Prüfer zur Annahme einer sonst unannehmbaren Entscheidung bewegen, entkräftet. So zeigt die Tabelle 3-10, daß der Prüfer bei Übereinstimmung seiner Mutmaßungen mit dem Stichprobenergebnis $x = 1$ mit 93%iger Sicherheit 3% als Fehlerhöchstgrenze festzusetzen vermag, wogegen er bei einem von seiner Einschätzung stark abweichenden Stichprobenergebnis ($x = 8$) einer Fehlerhöchstgrenze von 7% eine nur 80%ige Sicherheit zuordnen kann.

Tabelle 3-10

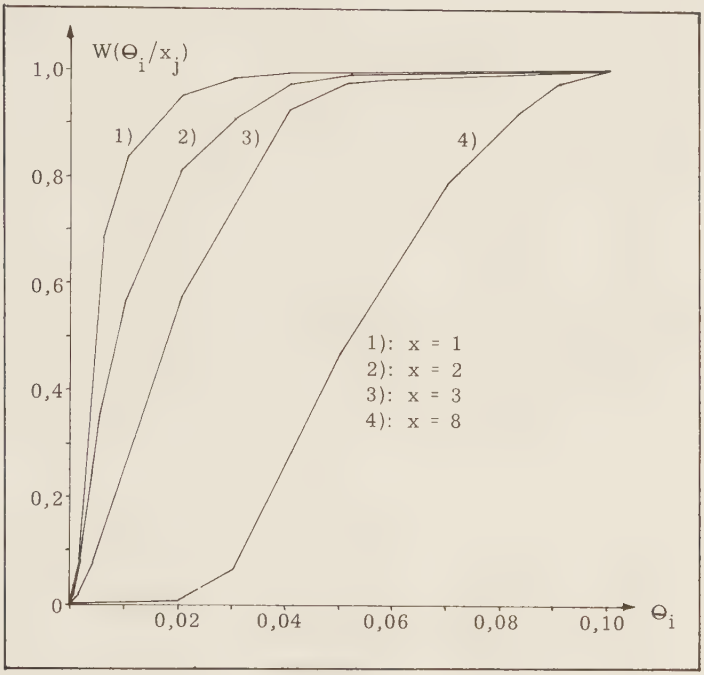
Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenen Fehleranteil Θ_c bei Variation des Stichprobenergebnisses x_j

Θ_c	Aussagesicherheit für Θ_c bei einem x_j von:			
	x = 1	x = 2	x = 3	x = 8
1%	84,6%	57,8%	26,3%	0,0%
3%	98,2%	91,4%	75,9%	7,1%
5%	99,9%	99,3%	97,2%	42,2%
7%	99,9%	99,9%	99,6%	80,8%

Würde bei praktischen Unternehmensprüfungen der Prüfer jedoch ein Stichprobenergebnis beobachten, das im Widerspruch zu seinen vorherigen Vermutungen steht, dürfte das für ihn ein Anlaß sein, eine zweite Stichprobe zu ziehen, deren Ergebnis dann entweder seine anfänglichen Vermutungen oder das Ergebnis der ersten Stichprobe bestätigen würde.

Abbildung 3-7

A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei Variation des Stichprobenergebnisses x_j und n = 100



Zum Abschluß der Sensibilitätsanalyse soll geprüft werden, wie die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten auf Änderungen des Stichprobenumfangs n reagieren. Neben dem Umfang von n = 100 unseres Ausgangsbeispiels sollen dazu die Stichprobenumfänge von n = 50, n = 150 und n = 200 untersucht werden. Da das Stichprobenergebnis mit x = 2 konstant gehalten wird, bedeutet das, daß der Fehleranteil in der Stichprobe p zwischen 0,01 und 0,04 liegt. Damit zeigen sich ähnliche Ergebnisse wie bei der Variation des Stichprobenergebnisses. Wie aus der folgenden Tabelle 3-11 hervorgeht, ergeben sich bei nahezu allen Stichprobenumfängen schon für relativ kleine Fehlerhöchstgrenzen sehr große Aussagesicherheiten. Lediglich für n = 50 liegt die A-posteriori-Verteilungsfunktion für alle Θ_i-Werte deutlich unterhalb der übrigen Verteilungsfunktionen, was darauf zurück-

Tabelle 3-11

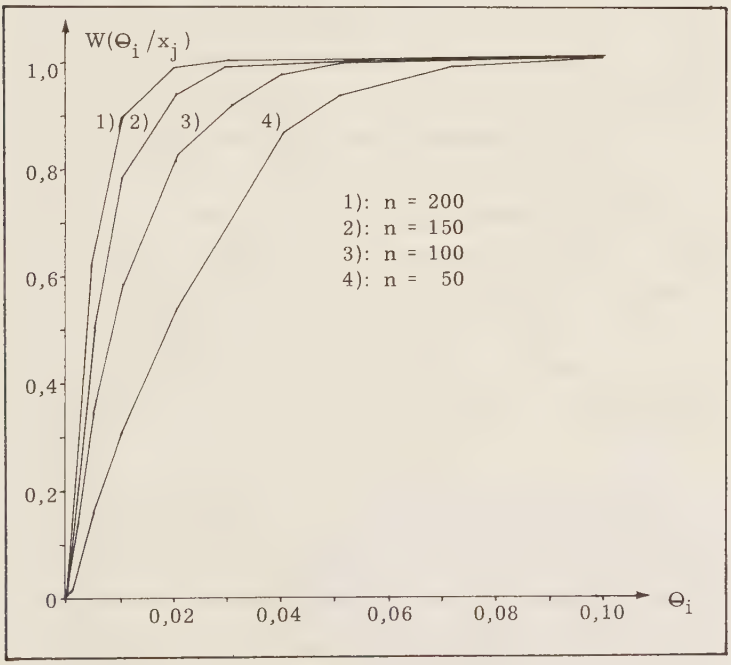
Berechnung der kumulierten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten bei variierendem Stichprobenumfang n für x = 2 und $W(\Theta_i)$ = sehr günstig

Θ_i	$W(\Theta_i)$	$W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i) \cdot W(x_j/\Theta_i)$	$W(\Theta_i/x_j)$	$W_{cum}(\Theta_i \leq \Theta_c/x_j)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
n = 50					
0,001	0,100	0,0012	0,0001200	0,0015267	0,0015267
0,005	0,500	0,0243	0,0121500	0,1545768	0,1561035
0,010	0,150	0,0758	0,0113700	0,1446534	0,3007569
0,020	0,100	0,1839	0,0183900	0,2339644	0,5347213
0,030	0,050	0,2510	0,0125500	0,1596658	0,6943871
0,040	0,050	0,2707	0,0135350	0,1721972	0,8665843
0,050	0,020	0,2565	0,0051300	0,0652658	0,9318501
0,060	0,010	0,2240	0,0022400	0,0284981	0,9603482
0,070	0,010	0,1850	0,0018500	0,0235364	0,9838846
0,080	0,005	0,1465	0,0007325	0,0093191	0,9932037
0,090	0,004	0,1125	0,0004500	0,0057251	0,9989288
0,100	0,001	0,0842	0,0000842	0,0010712	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,0786017	1,0000000	•
n = 150					
0,001	0,100	0,0097	0,0009700	0,0071479	0,0071479
0,005	0,500	0,1329	0,0664500	0,4896672	0,4968151
0,010	0,150	0,2510	0,0376500	0,2774413	0,7742564
0,020	0,100	0,2240	0,0224000	0,1650646	0,9393210
0,030	0,050	0,1125	0,0056250	0,0414504	0,9807714
0,040	0,050	0,0446	0,0022300	0,0164327	0,9972041
0,050	0,020	0,0156	0,0003120	0,0022992	0,9995033
0,060	0,010	0,0050	0,0000500	0,0003684	0,9998717
0,070	0,010	0,0015	0,0000150	0,0001106	0,9999823
0,080	0,005	0,0004	0,0000020	0,0000147	0,9999970
0,090	0,004	0,0001	0,0000004	0,0000030	1,0000000
1,000	0,001	0,0000	0,0000000	0,0000000	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,1357044	1,0000000	•
n = 200					
0,001	0,100	0,0164	0,0016400	0,0108136	0,0108136
0,005	0,500	0,1839	0,0919500	0,6062863	0,6170999
0,010	0,150	0,2707	0,0406050	0,2677353	0,8848352
0,020	0,100	0,1465	0,0146500	0,0965970	0,9814322
0,030	0,050	0,0446	0,0022300	0,0147039	0,9961361
0,040	0,050	0,0107	0,0005350	0,0035276	0,9996637
0,050	0,020	0,0023	0,0000460	0,0003034	0,9999671
0,060	0,010	0,0004	0,0000040	0,0000263	0,9999934
0,070	0,010	0,0001	0,0000010	0,0000066	1,0000000
0,080	0,005	0,0000	0,0000000	0,0000000	1,0000000
0,090	0,004	0,0000	0,0000000	0,0000000	1,0000000
0,100	0,001	0,0000	0,0000000	0,0000000	1,0000000
$\sum$	1,000	•	0,1516610	1,0000000	•

zuführen ist, daß die Stichprobe mit $p = \frac{x}{n} = \frac{2}{50} = 0,04$ ein relativ schlechtes Ergebnis hat. Außerdem wird der Sicherheitsgrad durch den kleinen Stichprobenumfang von n = 50 ungünstig beeinflußt. Die folgende Abbildung 3-8 zeigt den Einfluß des Stichprobenumfangs auf die Aussagesicherheit. Vergleicht man die Kurve 1) der Abbildung 3-8 mit der Kurve 1) der Abbildung 3-7, ist festzustellen, daß die Aussagesicherheit bei n = 200 etwas größer ist als bei n =100, obwohl beiden Kurven derselbe Fehleranteil von p = 0,01 zugrunde liegt.

Abbildung 3-8

A-posteriori-Verteilungsfunktionen bei Variation des Stichprobenumfangs n und einem Stichprobenergebnis von x = 2



In der folgenden Tabelle 3-12 sind zum besseren Vergleich die wichtigsten Ergebnisse der Tabellen 3-6 und 3-11 zusammengefaßt.

Tabelle 3-12

Aussagesicherheiten $W_{cum}(\Theta \leq \Theta_c / x_j)$ für vorgegebenen Fehleranteil Θ_c bei Variation des Stichprobenumfangs n bei konstantem x_j

Θ_c	Aussagesicherheit für Θ_c bei einem n von:			
	n = 50	n = 100	n = 150	n = 200
1%	30, %	57,8%	77,4%	88, %
3%	69,4%	57,8%	98, %	99,6%
5%	93, %	99,3%	99,9%	99,9%

Als Ergebnis der Sensibilitätsanalyse bleibt festzuhalten, daß die als Entscheidungsgrundlage dienenden A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten keinesfalls auf Variationen der in das Bayessche Theorem eingehenden subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten so stark reagieren, wie man erwarten könnte. Als besonders vorteilhaft erweist sich, daß extrem abweichende subjektive Wahrscheinlichkeiten von einem günstigen Stichprobenergebnis so überlagert werden, daß die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten hiervon wenig berührt werden. Anders verhalten sich die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten im Falle eines von der A-priori-Schätzung extrem abweichenden Stichprobenergebnisses, wie aus der Kurve 4) der Abbildung 3-7 zu entnehmen ist. Hier zeigte sich, daß die A-posteriori-Verteilungsfunktion für ein im Vergleich zur A-priori-Schätzung schlechtes Stichprobenergebnis von x = 8 erst bei einer dem Stichprobenergebnis entsprechenden Fehlerhöchstgrenze von Θ = 8% eine für ein Prüfungsurteil ausreichende Aussagesicherheit von 90% erreicht. Das bedeutet, daß die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten weit mehr von dem Stichprobenergebnis beeinflußt werden als bei abweichenden A-priori-Wahrscheinlichkeiten. Damit läßt sich sagen, daß die Gefahr eines Fehlurteils aufgrund falscher A-priori-Schätzungen relativ gering ist und daher die Bayessche Entscheidungslehre auch noch in Fällen eventueller Fehlschätzungen brauchbare Ergebnisse liefert.

3-4 Kritische Würdigung der Bayesschen Entscheidungslehre als Grundlage zur Gewinnung eines Prüfungsurteils

Die Ausführungen des Abschnitts 3-3 zeigen, daß mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre sich in einem sehr wichtigen Aufgabengebiet des Revisionswesens - der Bestimmung von Fehleranteilen eines Prüfungsfeldes auf Stichprobenbasis - durchaus brauchbare, jedoch nicht unumstrittene Ergebnisse erzielen lassen.[1]

Als erster Kritikpunkt ist hier die Frage nach der Zulässigkeit subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu nennen. Folgt man dem Hauptargument der Kritiker der Bayesschen Entscheidungslehre, sind sämtliche Entscheidungen, bei denen subjektive Momente irgendwie bei der Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten eine Rolle spielen, als unsicher abzulehnen, weil ihnen jegliche wissenschaftliche Grundlage fehlt.[2] Das bedeutet, daß man nur die mit einer A-priori-Gleichverteilung gewonnenen Wahrscheinlichkeitsaussagen des Bayessschen Theorems zur Grundlage einer Entscheidung machen kann. Wie wenig sinnvoll und logisch begründbar aber der Ansatz einer Gleichverteilung ist, hat die Erörterung des Abschnitts 3-3 gezeigt. Dem Zweifel an der Zulässigkeit subjektiver Wahrscheinlichkeiten ist entgegenzuhalten, daß bei Unternehmens-

---

1 Inwieweit sich die Instrumente der Bayesschen Entscheidungslehre auch zur Beantwortung der Frage, ob mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit ein als zulässig betrachteter Fehleranteil der Grundgesamtheit überschritten wurde oder nicht (Annahmestichprobe), eignen, wurde nicht geprüft. Zur Lösung dieser Fragen werden in der Literatur sequentielle Stichprobenverfahren vorgeschlagen. Vgl. dazu H. G. Trentin: Sampling in Auditing - A case Study. In: JofA, Bd. 125/126 (1968), S. 39 - 43. Elmar B. Schulte: Quantitative Methoden ..., a.a.O., S. 129 - 144. Zu bemerken ist jedoch, daß eine sequentielle Vorgehensweise auch mit Hilfe der Bayesschen Entscheidunglehre möglich ist. Das Verfahren wird jedoch erst in Kapitel 5 dargestellt.

2 Eine ausführliche Diskussion der Argumente gegen das subjektivistische Konzept der Bayesschen Entscheidungslehre erfolgt in Abschnitt 7-1.

prüfungen subjektive Momente ständig den Entscheidungsprozeß beeinflussen.[1] So erfolgt die Festlegung der Aussagesicherheiten, die Bestimmung der Stichprobenumfänge oder die Aufteilung der Prüfungsfelder allein aufgrund von Ermessensentscheidungen des Prüfers. Diese wiederum stützen sich in erster Linie auf die beruflichen Erfahrungen des Prüfers, indem die Ergebnisse früherer Prüfungen, Stand und Funktion des Internen Kontrollsystems, Vergleiche mit ursprünglich angenommenen und später beobachteten Fehlerquoten oder ähnliche Umstände berücksichtigt werden.[2] Hinzu kommt eine ausdrückliche Empfehlung des amerikanischen Instituts der Wirtschaftsprüfer (AICPA), bei Unternehmensprüfungen neben dem Stichprobenergebnis auch andere Informationsquellen zur Grundlage eines Prüfungsurteils zu machen.[3] Mit einer solchen Empfehlung wird der Prüfer jedoch dann allein gelassen mit der Folge, daß seine Erfahrungen, seine subjektiven Einschätzungen und andere Informationsquellen irgendwie unkontrolliert in das Prüfungsurteil fließen.

Zu welchen unhaltbaren Prüfungshandlungen unkontrollierte Mutmaßungen des Prüfers möglicherweise führen können, möge das folgende Beispiel zeigen: Ein Prüfer erwartet aufgrund

---

1 Vgl. John A. Tracy: Bayesian Statistical Methods..., a.a.O., S. 90.

2 Vgl. Karl Elmendorf: Zufallsstichproben ..., a.a.O., S. 53 - 56. John A. Tracy: Statistical Confidence Intervals ..., a.a.O., S. 47.

3 "The committee believes that reliability levels used in sampling applications in other fields are not necessarily relevant in determining appropriate levels for applications in auditing because the auditors reliance on sampling is augmented by other sources of reliance that may not be available in other fields."
AICPA: Relationship so Statistical Sampling to Generally Accepted Auditing Standards. A Special Report by the Committee on Statistical Sampling. In: JofA, Bd. 118 (1964), S. 56 - 58.

anderer Informationsquellen in einem bestimmten Prüfungsfeld eine außerordentlich geringe Fehlerquote. Um mit einer Sicherheit von z.B. 99% ein höheres Fehlerergebnis auszuschließen, bedarf es eines relativ großen Stichprobenumfangs.[1] Hier könnte der Prüfer den Eindruck gewinnen, daß die Größe des Stichprobenumfangs nicht der Urteilsgewinnung, sondern lediglich zur Erfüllung der statistischen Voraussetzungen dient. Unter diesem Aspekt wird er vielleicht den Test abbrechen und eine mehr oder weniger intuitive Entscheidung treffen. Daraus folgt, daß die subjektiven Momente bei Unternehmensprüfungen quantifiziert werden sollten, um in ihrem Einfluß kontrollierbar zu bleiben.

Die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre verlangt die Quantifizierung subjektiver Mutmaßungen und bringt so durch den Prozeß der Quantifizierung eine weit größere Objektivität und Rationalität in den Beurteilungsprozeß, als wenn sich die Mutmaßungen des Prüfers nur unkontrolliert z.B. bei der Festsetzung der Aussagesicherheit äußern. Bei ausführlicher schriftlicher Begründung der Höhe der festgelegten subjektiven Wahrscheinlichkeiten wird gleichzeitig eine wesentlich bessere intersubjektive Nachprüfbarkeit des Prüfungsurteils gewährleistet.[2]

Selbst wenn man den Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeiten für zulässig erachtet, läßt sich in der Frage ihrer Gewinnung ein weiterer Kritikpunkt sehen. Viele Prüfer mögen sich anfänglich außerstande fühlen, ihre Mutmaßungen numerisch

---

1 Der Umfang der Stichprobe und die Irrtumswahrscheinlichkeit hängen so zusammen, daß ceteris paribus mit abnehmender Irrtumswahrscheinlichkeit generell der Stichprobenumfang zunehmen muß.

2 Wenn subjektive Momente unkontrolliert z.B. bei der Festsetzung von Sicherheitsgraden eine Rolle spielen, sind die Prüfungsergebnisse nur schwer vergleichbar; zudem ist der Vorteil der Quantifizierbarkeit von Prüfungsurteilen durch die Anwendung von Zufallsstichproben dann unter Umständen nicht mehr gegeben.

auszudrücken. Wenn auch diese Schwierigkeit hier keinesfalls als geringfügig abgewertet werden soll, ist doch anzunehmen, daß ein Prüfer, der sich ein wenig mit der Problematik der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigt hat, aufgrund seines Fachwissens nach eingehender Analyse aller ihm zur Verfügung stehender Informationsquellen seine Erwartungen über die Höhe der Fehlerquote eines Prüfungsfeldes irgendwie quantifizieren kann. Ein nicht unwesentlicher Beitrag zur Verringerung dieser Schwierigkeiten dürfte der in Abschnitt 3-3 gemachte Vorschlag der kumulativen Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeiten sein. Aus den Schwierigkeiten der Bestimmung subjektiver Glaubwürdigkeiten folgt auch der Einwand, daß ein Verschätzen oder eine Zuordnung falscher Wahrscheinlichkeiten a priori zu einem zweifelhaften Prüfungsurteil führen muß. Diesem Einwand ist die Sensibilitätsanalyse des Abschnitts 3-3 entgegenzuhalten. Dort ergab sich, daß bei differierenden A-priori-Wahrscheinlichkeiten und Likelihoods sich die Differenzen so ausgleichen, daß der Prüfer selbst in Extremfällen kaum zu einem völlig falschen Prüfungsurteil gelangt.

Das bedeutet, wenn die Quantifizierung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten hinreichend begründbar erfolgt und der Bereich der möglichen Fehlerquoten sorgfältig abgesteckt wird, werden Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten in ihrer Bedeutung verringert oder gar durch das Gewicht des Stichprobenergebnisses völlig überlagert.[1] Außerdem neigen subjektive Schätzfehler wegen der Differenziertheit ihrer Bestimmung eher dazu sich gegen-

---

1 "If the apparatus is properly used, and if prior probabilities do not completely rule out any conceivable event, initial disagreements in prior probabilities are diminished and finally obliterated by the weight of sample evidence." Harry V. Roberts: The New Business Statistics. In: Journal of Business, Bd. 33 (1960), S. 29.

seitig aufzuheben.[1] In einer möglichen Diskrepanz zwischen subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeit und Stichprobenergebnis liegt außerdem ein weiterer Vorteil der Bayesschen Entscheidungslehre: nämlich der Hinweis, daß entweder die Informationsquellen nicht zuverlässig oder die Auswertung der Informationen falsch waren. In jedem Fall wird der Prüfer versuchen, dem betreffenden Prüfungsfeld verstärkte Aufmerksamkeit zu schenken, um die Ursachen der Differenzen zu ergründen.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß die auf Grundlage der Bayesschen Entscheidungslehre getroffenen Entscheidungen sich durchaus zur Abgabe eines objektiven Prüfungsurteils eignen. Insbesondere bieten sich dabei die folgenden Vorteile:

(1) Durch sinnvolle mathematische Kombination der sich durch die Stichprobenbeobachtung ergebenden objektiven Wahrscheinlichkeiten mit den subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten werden Prüfungsurteile ermöglicht, die auf einer völligen Ausschöpfung sämtlicher Informationsquellen basieren.[2]

(2) Die Quantifizierung der subjektiven Mutmaßungen ermöglicht eine sonst nicht vorhandene Nachprüfbarkeit der Prüfungsergebnisse durch andere Personen.

---

1 Drückt sich dagegen die subjektive Einschätzung nur in der Wahl eines geringeren Sicherheitsgrades aus, ist ein Ausgleich der Fehler nicht mehr gegeben. Vgl. Robert Buchner: Zur Anwendung ..., a.a.O., S. 24

2 Vgl James E. Sorensen: Bayesian Analysis in Auditing. In: Acc.Rev., Vol. XLIV (1969), S. 555; Sorensen spricht in diesem Zusammenhang von einem "whole decision framework". Ähnlich äußert sich Tracy: "The auditor thus gains the maximum value from audit sample." John A. Tracy: Statistical Methods ..., a.a.O., S. 98.

(3) Der Prüfungsprozeß wird allein durch die Tatsache der Quantifizierung anderer Informationen als der Stichprobenergebnisse rationaler und objektiver gestaltet.

(4) Durch die Berücksichtigung sämtlicher Informationen erreicht man bei gegebenem Stichprobenumfang für einen bestimmten kritischen Fehleranteilswert eine höhere Aussagesicherheit oder bei einem angestrebten Sicherheitsgrad eine größere Aussagegenauigkeit als bei den herkömmlichen statistischen Verfahren.

(5) Durch den möglichen Verzicht auf große Stichprobenumfänge und die Verwendung eines mathematisch relativ einfach zu handhabenden Instruments zur Entscheidungsfindung ergeben sich Einsparungen an Prüfungskosten.

(6) Einbeziehung der ökonomischen Konsequenzen einer Prüfung[1] wird ermöglicht durch Aufstellung einer Entscheidungsmatrix, wobei den Aktionen - Bestätigung der Ordnungsmäßigkeit auf Stichprobenbasis oder Durchführung einer vollprüfung - die möglichen Fehlerquoten als Umweltkonstellationen gegenüberstehen.[2] Die sich dabei ergebenden bedingten Ergebnisse werden mit den A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten gewichtet. Die Aktion mit den niedrigsten zu erwartenden Kosten sollte dann gewählt werden.[3]

---

1 Die ökonomischen Konsequenzen einer Prüfung sind:
(a) Prüfungskosten pro Beleg;
(b) Kosten der Korrektur fehlerhafter Buchungen;
(c) Kosten, die durch nicht entdeckte Fehler entstehen;
(d) Konsequenzen rechtlicher Natur, die bei Abgabe eines falschen Prüfungsurteils den Prüfer treffen.

2 Vgl. dazu den Ansatz von James E. Sorensen: Bayesian Analysis ..., a.a.O., S. 558 ff.

3 Auf diesen Aspekt der Einbeziehung der ökonomischen Konsequenzen wurde in diesem Kapitel verzichtet, weil hier nur das Problem der Schätzung von Fehlerquoten abgehandelt werden sollte. In allen folgenden Anwendungsbeispielen werden die ökonomischen Konsequenzen besonders berücksichtigt.

4 LÖSUNG VON ENTSCHEIDUNGSPROBLEMEN IM ABSATZBEREICH UNTER ANWENDUNG DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE

4-1 Die zentrale Bedeutung von Marketing-Entscheidungen

"Marketing ist Planung, Koordination und Kontrolle aller auf die aktuellen und potentiellen Märkte ausgerichteten Unternehmungsaktivitäten mit dem Zweck einer dauerhaften Befriedigung der Kundenbedürfnisse einerseits und der Erfüllung der Unternehmensziele andererseits."[1] Das bedeutet, daß man unter Marketing heute nicht nur die Gesamtheit aller Maßnahmen, die auf den Absatz und die Verteilung von Gütern und Dienstleistungen gerichtet sind, versteht, sondern darüberhinaus eine bestimmte Managementkonzeption, nämlich das Führen eines Unternehmens vom Markt her.[2]

Grundlage dieser Konzeption ist die Überlegung, daß der Erfolg jeglicher unternehmerischer Aktivität vom Markt her bestimmt wird.[3] Den Marketing-Entscheidungen kommt deshalb eine besondere Bedeutung zu, weil sie ihrerseits sämtliche anderen betrieblichen Teilbereiche wie Produktion, Forschung und Entwicklung oder Beschaffung und Finanzierung beeinflussen (Dominanz des Absatzsektors). Aus dem Katalog möglicher Marketing-Entscheidungen lassen sich folgende besonders wichtige Entscheidungen nennen:

---

1 Heribert Meffert: Marketing. In: Management Enzyklopädie. Bd. 4, S. 383.

2 Vgl. Konrad Mellerowicz: Unternehmenspolitik. Bd. 2. Freiburg 1963, S. 17.

3 Diesen Sachverhalt drücken Alderson und Green sehr treffend aus: "There is no payoff for the scientist in his laboratory, for the production manager in the most modern plant, or the wizard of finance except as the company's products find acceptance in the market."
Wroe Alderson and Paul E. Green: Planning and Problem Solving in Marketing. Homewood (Illinois) 1964. (2nd. printing 1966), S. 5.

(1) Produktentscheidungen[1]
Diese Entscheidungen bestimmen Produktänderungen und die Eliminierung alter oder die Einführung neuer Produkte mit dem Ziel, das Sortiment zu optimieren.

(2) Preisentscheidungen
Hierzu gehören neben den Preissetzungsentscheidungen auch die Entscheidungen über Liefer- und Zahlungsbedingungen, Rabatte, Garantieleistungsverpflichtungen etc.

(3) Distributionsentscheidungen
Darunter sind alle Entscheidungen zu verstehen, die sich auf den Vertrieb der Produkte richten.

(4) Werbungsentscheidungen
Hierbei wird über Art, Höhe und Zeitpunkt des Einsatzes der Werbemittel entschieden.

Allen diesen Marketing-Entscheidungen ist gemeinsam, daß ihre Auswirkungen von einer Vielzahl unkontrollierbarer Daten beeinflußt werden und sie deshalb mit einer erheblichen Unsicherheit behaftet sind. Im wesentlichen hängt das Ergebnis einer Marketing-Entscheidung von folgenden Einflußfaktoren ab:

(1) Allgemeine volkswirtschaftliche Lage;
(2) Spezielle Marktsituation für die betreffende Branche oder das Produkt;
(3) Käuferverhalten;
(4) Marktstellung und Verhalten der Konkurrenz;
(5) Verhalten des Handels.

Der Unternehmensführung obliegt es nun, angesichts der Unsicherheit der obigen Einflußfaktoren in den einzelnen Entscheidungsbereichen die Entscheidungen so zu treffen und aufeinander abzustimmen, daß die daraus resultierenden Aktionen die

---

1 Die Produktpolitik wird als das "Herz des Marketing" bezeichnet. Vgl. Heribert Meffert: Marketing, a.a.O., S. 394.

angestrebten Marketing-Ziele, die in der Regel mit den Unternehmenszielen, wie z. B. Gewinnmaximierung, Erzielung einer bestimmten Rendite oder eines bestimmten Marktanteils, identisch sind, optimal erreichen lassen.

Eine Gesellschaft, deren Konsumwünsche ständig steigen und sich laufend verändern, die Vergrößerung und Internationalisierung der Märkte, die Produktion von Massenartikeln und die Erhöhung der Markttransparenz haben dazu geführt, daß es immer schwieriger wird, im Absatzbereich die richtigen Entscheidungen zu treffen. Hinzu kommt, daß durch einen steigenden finanziellen Einsatz die Risiken einer Fehlentscheidung sich erheblich vergrößert haben. Das bedeutet aber, daß die Unternehmensführung beim Treffen von Marketing-Entscheidungen sich immer weniger auf das bloße Fingerspitzengefühl oder die Kunst des Verkaufens der Marketing-Abteilung verlassen kann; vielmehr muß sie versuchen, durch Anwendung quantitativer Verfahren zu möglichst rationalen Entscheidungen zu gelangen.

In diesem Kapitel soll deshalb geprüft werden, ob die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen grundsätzlich zu rationalen Entscheidungen und damit zu einer besseren Erreichung der Unternehmensziele führt. Da es jedoch wenig sinnvoll sein dürfte, die Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre bei allen Entscheidungsproblemen des Marketing zu erörtern, soll hier als Beispiel die Entscheidung über die Einführung eines neuen Produkts herausgestellt werden. Dieses Entscheidungsproblem erscheint zur Diskussion der Bayesschen Entscheidungslehre insofern besonders geeignet zu sein, weil kaum ein anderes Entscheidungsproblem des Absatzbereichs derart wichtig und komplex ist. Jedes Jahr werden von der Industrie Tausende von neuen Produkten auf den Markt gebracht, von denen jedoch nur ein geringer Anteil kommerziellen Erfolg hat. Eine Reduzierung von Planungs- und Entscheidungsfehlern bei der Einführung neuer Produkte durch eine systematische und objektive Vorgehensweise beim Treffen von Marketing-Entscheidungen ist daher besonders wünschenswert.

4-2 Die Bayessche Entscheidungslehre bei Entscheidungen über die Einführung neuer Produkte für den Fall kontinuierlich verteilter Absatzmöglichkeiten

Eine Entscheidung über die Einführung eines neuen Produktes bedarf immer dann besonderer Sorgfalt, wenn
(1) hohe Unsicherheit über den wirtschaftlichen Erfolg besteht und
(2) mit der Einführung relativ hohe Investitionskosten verbunden sind.[1] Der Entscheidende verfügt bei Entscheidungsproblemen dieser Art über zwei Handlungsalternativen oder Aktionen, entweder das neue Produkt auf den Markt zu bringen oder es nicht zu tun.[2] Den Aktionen des Entscheidenden steht die zu erwartende Nachfrage nach dem neuen Produkt als ungewisser Umweltzustand gegenüber.

Im einfachsten Fall läßt sich ein solches Entscheidungsproblem mit Hilfe einer Ergebnismatrix[3] darstellen und lösen. Zur Illustration dieser Vorgehensweise möge das folgende - absichtlich zunächst sehr einfach gehaltene - Beispiel dienen: Ein Unternehmen der elektrotechnischen Industrie, die Vereinigten Phonowerke, hat die Entwicklung eines Videorecorders, eines Gerätes, mit dem man ähnlich wie bei einem Tonbandgerät Fernsehsendungen aufzeichnen und wiedergeben kann, bis zur Produktionsreife abgeschlossen.[4] Damit steht die Unternehmensführung vor dem Entscheidungsproblem, entweder den Videorecorder auf den Markt zu bringen (Aktion a_1) oder die Einführung zu unterlassen (Aktion a_2). Der Erfolg beider Aktionen hängt von der unbekannten Höhe

---

1 Vgl. Wroe Alderson and Paul E. Green: Problem Solving ..., a.a.O., S. 202.

2 In der amerikanischen Literatur werden solche Entscheidungsprobleme als "two-action-problems" bezeichnet.

3 Zur Ergebnismatrix vgl. Abschnitt 2-4.

4 Eigentlich müßte auf jeder Stufe der Entwicklung eine Entscheidung darüber getroffen werden, ob die Entwicklung abzubrechen oder weiterzuführen ist. Ein Beispiel dafür findet sich bei Wroe Alderson and Paul E. Green: Problem Solving ..., a.a.O., S. 210 - 216.

des Absatzes dieser Geräte für den Planungszeitraum ab. Der in Frage kommende Absatzmarkt besteht aus ca. 20 Mio Haushalten, von denen nach einer Umfrage etwa 10% als potentielle Nachfrager zu betrachten sind. Auf der Basis dieser Untersuchung schätzt die Marktforschungsabteilung der Vereinigten Phonowerke die Zufallsvariable, Umweltzustand S mit den Ausprägungen s_j (j = 1, 2, ..., n), wie folgt ein: Einen guten Absatz (s_1), der einem Marktanteil von 25% bis 35% gleichkommt, glaubt sie, mit 50%iger Sicherheit ($W_o(s_1) = 0,5$)[1] zu erreichen; einem mittleren Absatz (s_2 = 15% bis unter 25% Marktanteil) ordnet sie eine 30%ige Wahrscheinlichkeit ($W_o(s_2) = 0,3$) zu; einen schlechten Absatz (s_3 = 0 bis unter 15% Marktanteil) schließlich hält sie mit 20%iger Wahrscheinlichkeit für möglich.[2] Die Abteilung "Rechnungswesen" hat für die obigen drei Absatzalternativen die diskontierten Gewinne bzw. Verluste ermittelt, die in der folgenden Tabelle 4-1 wiedergegeben sind.[3]

Tabelle 4-1

Gewinne bzw. Verluste bei Einführung bzw. Nicht-Einführung des neuen Produkts in Mio DM

Umweltzustände s_j	s_1	s_2	s_3
Aktionen a_i	guter Absatz	mittlerer Absatz	schlechter Absatz
a_1 (Einführung)	5	1	-3
a_2 (Nicht-Einführung)	0	0	0

1 Bei $W_o(s_1)$ besagt der Index o, daß es sich hier um eine A-priori-Wahrscheinlichkeit handelt. Die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten werden dagegen mit dem Index 1 versehen. Diese Indizierung wird in allen folgenden Kapiteln beibehalten und u.a. auch für Erwartungswerte verwendet.

2 Ein mögliches Verfahren der Gewinnung subjektiver Wahrscheinlichkeiten erfolgt später im Verlauf dieses Abschnitts.

3 Zwar sind diese Größen selbst wieder unsicher, da aber diese Unsicherheit alle Aktionen gleichmäßig betrifft, braucht sie nicht weiter beachtet zu werden. Vgl. dazu u.a. John S. Chin: and Don T. DeCoster: Multiple Product Costing by Multiple Correlation Analysis. In: Acc. Rev., Vol. XLI (1966), S. 675ff.

Bei Berücksichtigung der bereits oben angegebenen subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ läßt sich aus der Tabelle 4-1 der Erwartungswert der einzelnen Aktionen $E_o(a_i)$ als Geldgröße ermitteln, indem man die bedingten Ergebnisse in Form der Gewinne bzw. Verluste der Tabelle 4-1 mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten der Umweltzustände multipliziert und für die einzelnen Aktionen addiert. Diese Erwartungswerte sind der folgenden Tabelle 4-2 zu entnehmen.

Tabelle 4-2

Erwartungswerte der Aktionen a_i bei subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $E_o(a_i)$

Umweltzustände s_j	s_1	s_2	s_3	
A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$	0,5	0,3	0,2	$E_o(a_i)$
Aktion a_1	2,5	0,3	-0,6	+2,2
Aktion a_2	0	0	0	0

Der Erwartungswert für den durch Aktion a_1 (= Einführung des Aufzeichnungsgerätes) erzielbare Gewinn ist mit 2,2 Mio DM größer als der Erwartungswert des mit der Aktion a_2 (= keine Einführung) möglichen Gewinns. Gemäß der Bayesschen Entscheidungsregel[1] sollte die Entscheidung für Aktion a_1 erfolgen vorausgesetzt, andere Informationen sind nicht erhältlich.

Diese Prämisse wird jetzt fallengelassen, indem angenommen wird, daß die Marktforschungsabteilung der Vereinigten Phonowerke eine Umfrage[2] bei n = 100 Haushalten, die als potentielle

1 Zum Erwartungswert als Bayessches Entscheidungskriterium vgl. Abschnitt 2-3 und 7-2.

2 Es ist hier nicht beabsichtigt, die einzelnen Möglichkeiten zur Informationsbeschaffung aufzuzeigen und zu diskutieren. Für einen guten Überblick vgl. Robert Nieschlag, Erwin Dichtl und Hans Hörschgen: Einführung in die Lehre von der Absatzwirtschaft. Ein entscheidungstheoretischer Ansatz. Berlin 1968, S. 218 - 284.

Nachfrager für ein derartiges Produkt in Frage kommen, durchgeführt hat, indem sie den Haushalten einen Prototyp des Aufzeichnungsgerätes vorgeführt hat. Von den befragten Haushalten erklärten $x = 15$, daß sie ein solches Gerät kaufen würden, wenn es sich im Handel befinden würde. Dazu sei angenommen, daß das beobachtete Stichprobenergebnis ein zuverlässiger Indikator für das tatsächliche spätere Verhalten der befragten Haushalte ist.[1] Damit lassen sich jetzt die Likelihoods für das Auftreten dieses bestimmten Stichprobenergebnisses x_i bei Vorliegen eines der möglichen Umweltzustände s_j $(W(x_i/s_j))$ berechnen. Ähnlich wie im Fall einer Buchprüfung läßt sich hier die Zahl der Kaufwilligen als hypergeometrisch verteilt ansehen,[2] wobei N die Anzahl der potentiellen Nachfrager des betreffenden Absatzgebietes, M die Zahl der tatsächlichen Konsumenten für den Videorecorder der Vereinigten Phonowerke, n den Stichprobenumfang und x_i die in der Stichprobe beobachtete Zahl der Kaufwilligen darstellt. Bei den mit Hilfe der Hypergeometrischen Verteilung gemachten Wahrscheinlichkeitsaussagen für das Auftreten von x Kaufwilligen handelt es sich um bedingte Wahrscheinlichkeiten,[3] die nur dann Gültigkeit haben, wenn der Parameter M tatsächlich den unterstellten Wert angenommen hat. Der Parameter M ist aber auch hier nicht bekannt, sondern wird von einer Reihe von Einflußfaktoren bestimmt, die ihrerseits wieder die Wahrscheinlichkeit für das gefundene Stichprobenergebnis x_i festlegen.[4]

---

1 Die Verwendung der Ergebnisse von Konsumentenbefragungen ist problematisch, weil häufig die geäußerte Absicht und späteres tatsächliches Verhalten auseinander fallen.

2 Auch hier könnte man sich zur Begründung der Hypergeometrischen Verteilung des Urnenmodells bedienen. Die Stichprobe erfolgt "ohne Zurücklegen", da ein einmal befragter Haushalt sicher nicht noch einmal befragt wird.

3 Vgl. Abschnitt 3-3.

4 Hier sei noch einmal auf den feinen Unterschied in der Betrachtungsweise der Bayesschen Statistik zu der der Klassischen Statistik hingewiesen: Ein zu schätzender Parameter wird in der Bayesschen Statistik als Zufallsvariable angesehen, wogegen die Klassische Statistik von der Existenz eines festen, wahren Wertes für diesen Parameter ausgeht.

Der bereits erwähnten rechentechnischen Schwierigkeiten beim Arbeiten mit der Hypergeometrischen Verteilung wegen empfiehlt sich hier ein Ausweichen auf eine zur Approximation zulassige Binomialverteilung.[1] Damit lassen sich jetzt die Likelihoods $W(X=x_i/\Theta_j)$ - wobei $\Theta_j \equiv s_j$ - mit Hilfe der folgenden Formel der Binomialverteilung berechnen.

$$(4\text{-}1) \qquad W(X = x_i/\Theta_j) = f_B(x_i; n, \Theta_j) = \binom{n}{x_i} \cdot \Theta_j^{x_i} \cdot (1 - \Theta_j)^{n - x_i} .$$

In der unter (4-1) angegebenen Formel der Binomialverteilung steht Θ_j für die alternativ möglichen Umweltzustände s_j, die sich jeweils in Marktanteilen ausdrücken. Um hier eine eindeutige Zuordnung zu erreichen, wird jeweils die Klassenmitte der Marktanteilsklassen gewählt. Setzt man die Formel (4-1) in das Bayessche Theorem ein, ergibt sich:

$$(4\text{-}2) \qquad W_1(s_j/x_i) = \frac{W_o(s_j) \cdot \binom{n}{x_i} \cdot \Theta_j^{x_i} \cdot (1 - \Theta_j)^{n - x_i}}{\sum_{j=1}^{n} W_o(s_j) \cdot \binom{n}{x_i} \cdot \Theta_j^{x_i} \cdot (1 - \Theta_j)^{n - x_i}} .$$

Dabei bedeuten: $W_o(s_j)$ = A-priori-Wahrscheinlichkeit für den Umweltzustand s_j; n = Stichprobenumfang; x_i = Stichprobenergebnis (Zahl der Kaufwilligen in der Stichprobe); $\Theta_j \equiv s_j$ = Anteil der Käufer in der Grundgesamtheit (Klassenmitte der Marktanteilsklassen).

---

1 Setzt man bei festem n und $N \longrightarrow \infty$ den Parameter $\Theta = \frac{M}{N} = \text{const.}$, geht die Hypergeometrische Verteilung gegen eine Binomialverteilung. Unter der Voraussetzung, daß über dem gesamten Bereich der Zufallsvariablen X die Wahrscheinlichkeiten der Binomialverteilung von denen der Hypergeometrischen Verteilung um höchstens 1% abweichen, läßt sich die Hypergeometrische Verteilung durch eine Binomialverteilung approximieren, wenn $n \leq 0,04 \cdot N$ ist. Wenn dabei n jeweils kleiner ist als N - n, M, N - M, ergibt sich als "beste" der approximierenden Binomialverteilungen eine Binomialverteilung mit den Parametern n und $\Theta = \frac{M}{N}$. Vgl. dazu Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 22ff. Für unser Beispiel ist n = 100 und N = 20 Mio und damit auch $n < 0,04 \cdot 20$ Mio, so daß die obige Approximation zulässig ist.

Mit Hilfe des Bayesschen Theorems in der Form (4-2) lassen sich jetzt die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(s_j/x_i)$ der Umweltzustände, ausgedrückt in Marktanteilen, bestimmen, indem man eine Tabelle folgender Art anlegt:

Tabelle 4-3

A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(s_j/x_i)$ für vorgegebene $W_o(s_j)$ und x = 15

s_j	$W_o(s_j)$	$W(x_i/\Theta_j)$ $s_j \equiv \Theta_j$	$W_o(s_j) \cdot W(x_i/\Theta_j)$	$W_1(s_j/x_i)$
$s_1 = 0,3$	0,5	0,0002	0,00010	0,004746
$s_2 = 0,2$	0,3	0,0481	0,01443	0,684860
$s_3 = 0,1$	0,2	0,0327	0,00654	0,310394
$\sum$	1,0	•	0,02107	1,000000

In der Tabelle 4-3 werden in der vierten Spalte für jeden der drei alternativ möglichen Umweltzustände s_j durch Multiplikation der Werte der zweiten und dritten Spalte die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten aus den subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ und den Likelihoods $W(x_i/\Theta_j)$[1] der Formel (4-1) berechnet. Gemäß der Formel (4-2) ergeben sich die in der fünften Spalte aufgeführten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(s_j/x_i)$ durch Division der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten durch ihre Summe. Diese A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten werden nun in der folgenden Tabelle 4-4 zur Berechnung der A-posteriori-Erwartungswerte $E_1(a_i)$ benutzt.

Tabelle 4-4

A-posteriori-Erwartungswerte $E_1(a_i)$

s_j	s_1	s_2	s_3	$E_1(a_i)$
$W_1(s_j/x_i)$	0,004746	0,684860	0,310394	
Aktion a_1	0,023730	0,684860	-0,931182	-0,222592
Aktion a_2	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

1 Die Werte der Likelihoods wurden abgelesen bei Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 49 ff, hier: S. 84.

Eine Entscheidung nach dem Bayesschen Entscheidungskriterium aufgrund des Vergleichs der Erwartungswerte beider Aktionen würde jetzt zugunsten der Aktion a_2 (= keine Einführung) ausfallen, weil der Erwartungswert dieser Aktion um 222.592 DM höher liegt: $E_1(a_2) = 0 > E_1(a_1) = -222.592$ DM. Diese Lösung erscheint jedoch aus mehreren Gründen unbefriedigend:

(1) Die Einschränkung der Umweltzustände auf nur drei mögliche Marktanteile entspricht nicht der Realität. Damit erscheint auch die Zuordnung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten fragwürdig.

(2) Die Bestimmung von bedingten Gewinnen oder Verlusten für einen konkreten Marktanteil dürfte kaum möglich sein. Hier empfiehlt sich ein Entscheidungskalkül aufgrund von Kosten- oder Erlösfunktionen, wie im folgenden noch gezeigt wird.

(3) Eine Entscheidung von Aktion a_1 zur konträren Aktion a_2 nur aufgrund einer Stichprobe vom Umfang n = 100 dürfte dem Entscheidenden nicht leicht fallen; es sei denn, das Entscheidungsmodell vermag ihm eine Erklärung dafür zu liefern.

Diese Kritikpunkte lassen sich jedoch durch die Wahl anderer Modellvoraussetzungen unseres Beispiels umgehen. Daher soll im folgenden das Ausgangsbeispiel entsprechend abgewandelt werden: Das Entscheidungsproblem der Vereinigten Phonowerke besteht weiterhin in der Wahl zwischen Aktion a_1 (= Einführung des Videorecorders) und Aktion a_2 (= Nicht-Einführung). Nunmehr sei angenommen, daß man den Videorecorder zu einem Preis von 1.500,- DM an den Handel verkaufen will.[1]

---

1 Dieser Preis zuzüglich des üblichen Kalkulationsaufschlags möge sich bei einer Umfrage als Durchschnittspreis, den ein potentieller Konsument bereit ist zu zahlen, ergeben haben. Der Preis selbst bestimmt neben anderen Einflußfaktoren auch die Absatzmenge. Eine Einbeziehung des Preises in das Entscheidungskalkül soll aber hier wegen der damit verbundenen Komplexität unterbleiben. Zur Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre bei Preisetzungsproblemen vgl. Paul E. Green: Intra-firm Applications ..., a.a.O., S. 78 - 97.

Zur Aufnahme der Produktion sind für den Planungszeitraum von fünf Jahren Investitionen in Höhe von 220 Mio DM erforderlich, die als mengenunabhängige fixe Kosten c zu betrachten sind.[1] Die variablen Produktionskosten pro Gerät b wurden mit 1.300,- DM ermittelt, so daß eine lineare Kostenfunktion in Abhängigkeit zur abgesetzten Menge q zugrunde zu legen ist:

(4-3) $k(q) = c + bq$ bzw.

(4-3a) $k(q) = -220.000.000 + 1.300\,q.$

Der in Frage kommende Absatzmarkt besteht weiterhin aus 20 Mio Haushalten, die alle zunächst mangels weiterer Informationen als potentielle Konsumenten für ein solches Aufzeichnungsgerät betrachtet werden. Damit sind zwei Größen unsicher:

(1) Die Zahl der Haushalte, die sich innerhalb der nächsten fünf Jahre ein solches Gerät kaufen werden;
(2) Die Zahl der Käufer, die sich den Videorecorder der Vereinigten Phonowerke in diesem Zeitraum anschaffen werden.

Zur besseren Abschätzung des zu erwartenden Absatzes an Videorecordern der Vereinigten Phonowerke empfiehlt es sich, zunächst von dem Anteil der Haushalte auszugehen, die sich innerhalb des Planungszeitraums zum Kauf eines solchen Gerätes überhaupt entschließen könnten (Größe (1)). Dazu eignen sich bereits vorhandene Statistiken mit Angaben z. B. über:

(1) Zahl der Haushalte mit Fernsehapparat; nur wer bereits einen Fernseher besitzt, hat Verwendung für ein Aufzeichnungsgerät;
(2) Größe und Zusammensetzung der einzelnen Haushalte;
(3) Einkommensverhältnisse und -erwartungen der in Frage

---

1 Wenn auch der hier angenommene Betrag an fixen Kosten unrealistisch hoch erscheint, ist zu berücksichtigen, daß dieser Betrag lediglich zur besseren und übersichtlicheren Darstellung der Bayesschen Vorgehensweise dient.

kommenden Haushalte sowie die soziale und berufliche Stellung des Haushaltsvorstandes;

(4) Zahl der in den ersten fünf Jahren nach ihrer Markteinführung abgesetzten ähnlichen Produkte (z.B. Farbfernsehgeräte, Stereoanlagen etc.);

(5) Allgemeine Nachfrageentwicklung nach teueren und hochwertigen Gebrauchsgütern.

Nach Abwägung aller dieser und ähnlicher Einflußfaktoren auf den Absatz an Videorecordern glaubt die Marktforschungsabteilung, mit einem Erwartungswert von 20% = 4 Mio aller Haushalte als zu erwartende Nachfrage nach Aufzeichnungsgeräten innerhalb der nächsten fünf Jahre rechnen zu können. Diese Zahl ist nun Ausgangspunkt für die Schätzung des zu erwartenden Absatzes Q an Geräten der Vereinigten Phonowerke. Dabei wird der zu erwartende Marktanteil im wesentlichen von folgenden Haupteinflußfaktoren bestimmt:

(1) Bisheriger Marktanteil und seine Entwicklung bei anderen Produkten des Unternehmens;[1]

(2) Stand der Entwicklung eines Aufzeichnungsgerätes bei Konkurrenz (eventueller Marktvorsprung möglich);[2]

(3) Bisher angesprochene Käuferschicht verbunden mit einem eventuellen Image der Produkte der Vereinigten Phonowerke;

(4) Auswirkungen des geplanten Absatzpreises, der Garantie- und Servicebedingungen, der Absatzmethoden und -wege und der Werbung;

(5) Möglichkeit des Auftauchens ausländischer Konkurrenz mit Dumping-Preisen;[3]

(6) Erfahrungen der Vereinigten Phonowerke mit in der Vergangenheit neu eingeführten Produkten (z.B. Tonbandgeräte).

---

1 Hierzu dürfte sich eine Zeitreihenanalyse eignen.

2 Wenn man nicht gerade Industriespionage betreiben will, dürften diese Daten schwierig zu beschaffen sein.

3 In dieser Weise hat z.B. die japanische Industrie in früheren Jahren auf dem amerikanischen und den europäischen Märkten Beunruhigung gestiftet.

Die Analyse dieser Faktoren läßt die Marktforschungsabteilung der Vereinigten Phonowerke auf einen Erwartungswert von 25% Marktanteil von den auf 4 Mio geschätzten Nachfragern = 1 Mio Geräte schließen. Die Größe des zukünftigen tatsächlichen Absatzes an Aufzeichnungsgeräten kann damit auch als Zufallsvariable Q mit einer Wahrscheinlichkeitsfunktion f(q) und einem Erwartungswert $E_o(Q)$ = 1 Mio betrachtet werden. Aus Gründen der Vergleichbarkeit mit späteren Stichprobenergebnissen empfiehlt es sich jedoch, den Absatz an Videorecordern anteilsmäßig am Gesamtmarkt von 20 Mio Haushalten zu messen. Deshalb wird P als weitere Zufallsvariable eingeführt, die lediglich der Quotient aus Q und dem Gesamtmarkt ist.

$$(4\text{-}4) \qquad P = \frac{Q}{20\ \text{Mio}} \ .$$

Der Erwartungswert $E_o(P)$ ist dann:

$$(4\text{-}4a) \qquad E_o(P) = \frac{E_o(P)}{20\ \text{Mio}} = \frac{1\ \text{Mio}}{20\ \text{Mio}} = 0{,}05.$$

In der weiteren Bestimmung einer Wahrscheinlichkeitsfunktion für die Zufallsvariable P glaubt man, vor allem aufgrund von Erfahrungen bei der Einführung neuer Produkte in der Vergangenheit,[1] daß es sich hier um eine symmetrische Verteilung um den Erwartungswert $E_o(P)$ handelt, die die Gestalt einer Normalverteilung folgender Art haben könnte:

$$(4\text{-}5) \qquad f(p) = f_N(p;\ E_o(P),\ \sigma_o^2(P)) = \frac{1}{\sigma_o(P)\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{p - E_o(P)}{\sigma_o(P)}\right)^2}.$$

---

1 Vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 283 f. Sollten keine klaren Vorstellungen über die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsverteilung auf seiten des Entscheidenden vorhanden sein, schlagen Dyckman et al. vor, aufgrund von Vergangenheitsdaten eine Freihandkurve in Form einer Normalverteilung durch die graphische Darstellung dieser Daten zu legen.

2 Zur Normalverteilung vgl. Kurt Stange: Statistik ..., a.a.O., S. 208 ff.

Hohe Unsicherheit besteht jedoch hinsichtlich der Größe der Varianz $\sigma_o^2(P)$, die sich darin ausdrückt, daß man einem relativ großen Bereich - einem Absatz von 800.000 bis 1.200.000 Stück (für P: 0,04 bis 0,06) - eine Wahrscheinlichkeit von 0,5 zuordnet. Damit ergibt sich als A-priori-Wahrscheinlichkeit für den Absatz an Videorecordern in Stück:

(4-6) $$W_o(800.000 \leq Q \leq 1.200.000) = 0,5.$$

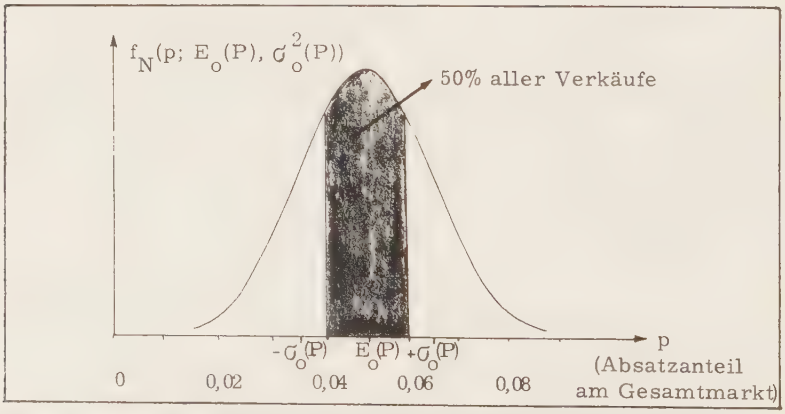
Bezieht man die A-priori-Wahrscheinlichkeit auf den Anteil am Gesamtmarkt, ergibt sich:

(4-6a) $$W_o(0,04 \leq P \leq 0,06) = 0,5.$$

Die folgende Abbildung 4-1 zeigt die bisher vorgenommenen Schritte zur Schätzung der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Abbildung 4-1

Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung als Normalverteilung $f_N(p; E_o(P), \sigma_o^2(P))$



Bei der Bestimmung der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung als Normalverteilung erweist es sich als besonders vorteilhaft, daß bei Kenntnis der zwei Parameter der Normalverteilung, Erwartungswert und Varianz, die ganze Verteilung festgelegt ist.[1]

1 Ein weiterer Vorteil der Normalverteilung ist, daß jede Normalverteilung mit Hilfe der z-Transformation in die Standardnormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$, deren Flächenwerte vollständig tabelliert sind, überführt werden kann.

Da der Erwartungswert $E_o(P)$ als "bekannt" vorausgesetzt werden darf, bedarf es zur näheren Bestimmung der in Frage kommenden Normalverteilung der Ermittlung der Varianz $\sigma_o^2(P)$. Diese könnte man ebenso wie den Erwartungswert schätzen[1] oder bei Vorliegen von Wahrscheinlichkeitsaussagen wie in unserem Beispiel mit Hilfe der z-Transformation berechnen:

$$(4\text{-}7) \qquad z = \frac{p - E_o(P)}{\sigma_o(P)} \; .$$

Aus der Gleichung (4-6a) ergibt sich:

$$(4\text{-}8) \qquad W_o(p < 0,04) = W_o(p > 0,06) = 0,25 \; .$$

Aus einer Tabelle der Normalverteilung läßt sich für eine Wahrscheinlichkeit von 0,25 ein z-Wert von 0,675 ablesen.[2] Mit (4-7) ermittelt man die Standardabweichung $\sigma_o(P)$ als:

$$(4\text{-}9) \qquad \sigma_o(P) = \frac{0,06 - 0,05}{0,675} = 0,0148 \approx 0,015 \; .^{3)}$$

Um nun aufgrund der A-priori-Informationen eine Entscheidung zwischen Aktion a_1 (= Einführung des Videorecorders) und Aktion a_2 (keine Einführung) treffen zu können, sind wieder die Erwartungswerte beider Aktionen zu ermitteln. Anders als im Fall unseres Ausgangsbeispiels kann hier nicht jeder Ausprägung der Umweltvariablen eine eindeutige numerische Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden, weil die Wahrscheinlichkeit über dem Bereich der Zufallsvariablen P durch eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsfunktion, die Normalverteilung, bestimmt wird.[4]

---

1 Vgl. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 52.

2 Abgelesen bei Wolfgang Wetzel et al.: Statistische Tabellen, a.a.O., S. 95 - 103.

3 Der approximative Wert für $\sigma_o(P)$ dient im folgenden zur Rechenvereinfachung; auch in praxi dürfte eine solche Approximation statthaft sein, da die Werte sowieso geschätzt sind.

4 Morgan schlägt zur Berechnung der Erwartungswerte vor, den Bereich der Umweltzustände in Intervalle zu zerlegen und der jeweiligen Intervallmitte die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Vgl. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 54 ff.

Zur Berechnung der Erwartungswerte ist daher das Integral aus der A-priori-Wahrscheinlichkeitsfunktion und den Erlösfunktionen für a_1 und a_2 zu bilden.[1] Dazu ist es sinnvoll, zunächst eine Analyse des Break-even-Punktes vorzunehmen. Der Break-even-Punkt oder auch Erlösschwelle gibt an, bei welcher Absatzmenge der Erlös der Aktion a_1 gleich dem Erlös der Aktion a_2 ist (graphisch: Schnittpunkt der Erlösfunktionen). Zur Festlegung der Erlösschwelle ist die Aufstellung der Erlösfunktionen, die die Erlöse der Aktionen a_i in Abhängigkeit zur abgesetzten Menge an Aufzeichnungsgeräten ($q = p \cdot 20$ Mio) angeben notwendig. Bei Unterstellung eines linearen Verlaufs hat die Erlösfunktion für unser Beispiel folgende allgemeine Form:

(4-10) $\quad e(a_i, p) = c + dp \cdot 20.000.000$.

Dabei gibt die Konstante c die bereits angeführten mengenunabhängigen fixen Kosten in Höhe von 220 Mio DM an. Die Konstante d gibt als Steigung der Erlösfunktion den Erlös pro Stück wieder, der als Differenz zwischen dem Verkaufspreis von 1.500,- DM und den variablen Produktionskosten b = 1.300,- DM = 200,- DM beträgt. Die bereits oben erläuterte Variable p bestimmt als Anteil der Nachfrager am Gesamtmarkt die abgesetzte Menge.

Nach (4-10) lassen sich nun die Erlösfunktionen für die Aktionen a_1 und a_2 wie folgt aufstellen:

(4-10a) $\quad e(a_1, p) = e_1 = -220.000.000 + 200(20.000.000 \cdot p);$

$$e_1 = 4.000.000.000\ (p - 0{,}055).$$

(4-10b) $\quad e(a_2, p) = e_2 = 0.$

Zur Bestimmung des Break-even-Punktes setzt man den Erlös der Aktion a_1 gleich dem Erlös der Aktion a_2 und erhält den

---

1 Zu dieser Vorgehensweise vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 365 ff.

kritischen p-Wert (p_c)

(4-11a) $0 = -220.000.000 + 200\ (20.000.000 \cdot p_c)$

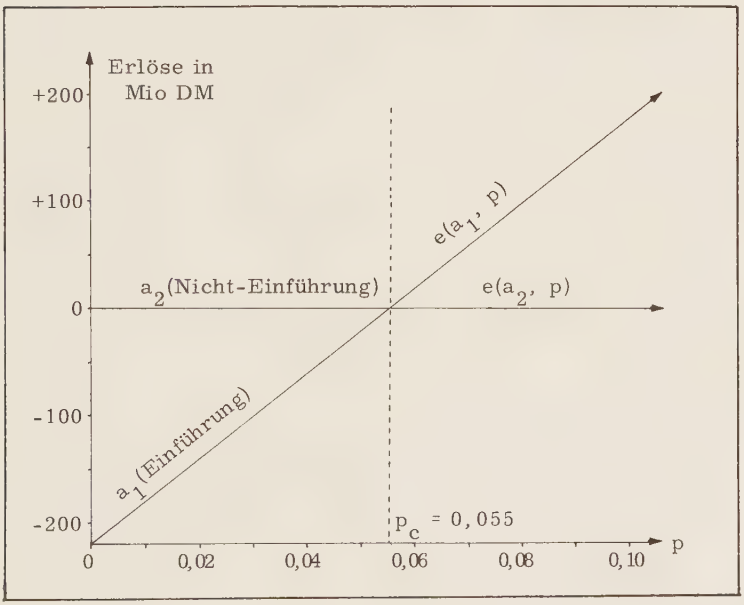
(4-11b) $p_c = \frac{220.000.000}{200 \cdot 20.000.000} = 0,055$ bzw. in Stück:

(4-11c) $q_c = 0,055 \cdot 20.000.000 = 1.000.000$ Stück.

Die folgende Abbildung zeigt für unser Beispiel die Erlösfunktionen und den Break-even-Punkt.

Abbildung 4-2

Erlösfunktionen $e(a_i, p)$ und Break-even-Punkt p_c



Zur weiteren Analyse des Entscheidungsproblems erscheint es aufgrund folgender Überlegung sinnvoller, nicht von den Erlösen, sondern von den Verlusten der Aktionen a_1 und a_2 auszugehen: Bei einer Entscheidung hängt der Erfolg der ge-

wählten Aktion von der Höhe des unbekannten Anteils p der Haushalte am Gesamtmarkt ab, die das Gerät innerhalb des Planungszeitraums kaufen. Entscheidet sich die Unternehmensführung zur Einführung des Aufzeichnungsgerätes, führt diese Entscheidung so lange zu einem Verlust, wie p unter $p_c = 0{,}055$ liegt. Wird dagegen die Entscheidung getroffen, das Gerät nicht zu produzieren, ergibt sich, wenn p tatsächlich größer ist als $p_c = 0{,}055$, ein entgangener Gewinn oder Opportunitätsverlust, der mit wachsenden p-Werten steigt. Der Opportunitätsverlust ist damit für jeden p-Wert die Differenz zwischen dem Erlös der gewählten Aktion und dem Erlös der für den betreffenden p-Wert optimalen Aktion. Aus den Erlösfunktionen (4-10a) und (4-10b) lassen sich nun die folgenden Verlustfunktionen ableiten, die den Verlust in Abhängigkeit zur gewählten Aktion a_i und zum Anteil p der Nachfrager des Gesamtmarkts, die das Gerät kaufen, angeben.

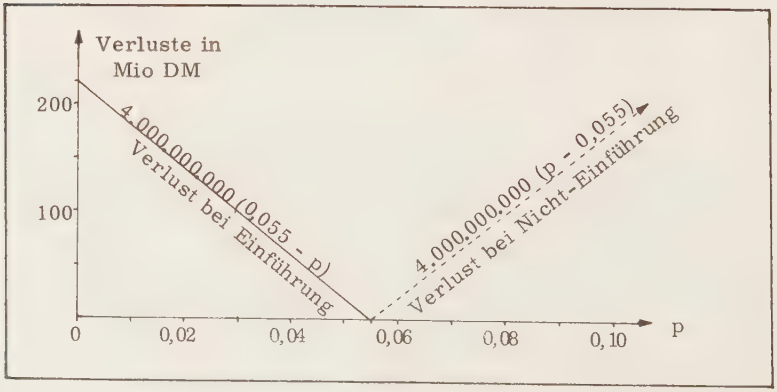
(4-12a) $$l(a_1, p) = l_1 = \begin{cases} 4.000.000.000 \cdot (0{,}055 - p) & \text{bei } p < 0{,}055 \\ 0 & \text{bei } p \geq 0{,}055 \end{cases}$$

(4-12b) $$l(a_2, p) = l_2 = \begin{cases} 4.000.000.000 \cdot (p - 0{,}055) & \text{bei } p \geq 0{,}055 \\ 0 & \text{bei } p < 0{,}055 \end{cases}$$

Die folgende Abbildung 4-3 zeigt die Verlustfunktionen (4-12a) und (4-12b).

Abbildung 4-3

Verlustfunktionen $l(a_i, p)$ der Aktionen a_1 und a_2



Zur Ermittlung der erwarteten Verluste der einzelnen Aktionen a_i müßte jetzt das Integral aus dem Produkt der Verlustfunktion der Aktion a_i und der A-priori-Wahrscheinlichkeitsfunktion über alle p-Werte berechnet werden. Der erwartete Verlust der Aktion a_i ergibt sich allgemein wie folgt:

(4-13) $$E_o\, l(a_i, p) = f(p) \cdot l(a_i, p) \cdot dp \ .$$

Für die Aktionen a_1 und a_2 unseres Beispiels folgt daraus:

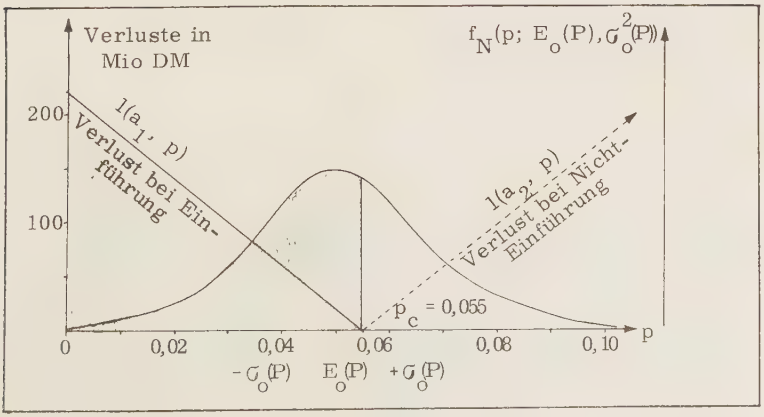
(4-13a) $$E_o\, l(a_1, p) = f_N(p; 0{,}05,\ 0{,}015^2) \cdot 4.000.000.000 \cdot (0{,}055 - p) \cdot dp \ ;$$

(4-13b) $$E_o\, l(a_2, p) = f_N(p; 0{,}05,\ 0{,}015^2) \cdot 4.000.000.000 \cdot (p - 0{,}055) \cdot dp \ .$$

Gemäß der Bayesschen Entscheidungsregel würde die Aktion gewählt, deren erwarteter Verlust ein Minimum ist. Bei den vorliegenden Modellvoraussetzungen unseres Beispiels erweist sich jedoch die explizite Berechnung der Integrale (4-13a) und (4-13b) zur Entscheidungsfindung als überflüssig. Stattdessen läßt sich die Entscheidung nach der Bayesschen Entscheidungsregel direkt durch Vergleich des Erwartungswertes der Nachfrage (hier: $E_o(P)$) mit der Erlösschwelle (hier: p_c) treffen. Diese Möglichkeit soll zunächst anhand der folgenden Abbildung 4-4 verdeutlicht werden, die neben den Verlustfunktionen der Abbildung 4-3 die subjektive A-priori-Normalverteilung zeigt.

Abbildung 4-4

Verlustfunktionen $l(a_i, p)$ und subjektive A-priori-Normalverteilung $f_N(p; E_o(P), \sigma_o^2(P))$



Aus der Abbildung 4-4 ist ersichtlich, daß die Höhe des erwarteten Verlustes der beiden Aktionen a_1 und a_2 von der Lage des Erwartungswertes der Nachfrage $E_o(P)$ in bezug auf die Erlösschwelle p_c abhängt, weil der Verlust beider Aktionen auf jeder Seite von p_c symmetrisch ist. Falls wie im vorliegenden Beispiel der Erwartungswert der Nachfrage kleiner ist als die Erlösschwelle ($E_o(P) < p_c$), bedeutet das, daß der Verlust der Aktion a_1 mit einer größeren Wahrscheinlichkeitsdichte multipliziert wird als der Verlust der Aktion a_2. Der erwartete Verlust der Aktion a_1 als Integral des Produktes aus der Verlustfunktion für a_1 und der Wahrscheinlichkeitsdichte für alle p-Werte kleiner als p_c (dunkel markierte Fläche in Abbildung 4-4) ist damit ebenfalls größer als der erwartete Verlust der Aktion a_2. Wäre dagegen der Erwartungswert der Nachfrage größer als die Erlösschwelle ($E_o(P) > p_c$), wäre der erwartete Verlust der Aktion a_2 größer als der der Aktion a_1. Für unser Beispiel folgt daraus, daß die Vereinigten Phonowerke sich für die Nicht-Einführung des Videorecorders entscheiden sollten, weil der aus dieser Aktion resultierende erwartete Verlust kleiner ist als bei Einführung des Gerätes.

Die Möglichkeit, eine Entscheidung auf der Basis des Vergleichs des erwarteten Absatzes mit der Erlösschwelle ($E(P) \gtrless p_c$), ist bei allen Entscheidungsproblemen möglich, bei denen zwei lineare Erlösfunktionen und eine einzige kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Umweltzustände vorliegen. Dazu der folgende Beweis:[1]
Unter der Voraussetzung, daß die Aktionen a_1 und a_2 folgende lineare Erlösfunktionen haben:

(4-14a) $$e(a_1, p) = e_1 = c_1 + d_1 \cdot p$$

(4-14b) $$e(a_2, p) = e_2 = c_2 + d_2 \cdot p ,$$

wobei c_1, c_2 (fixe Kosten) und d_1, d_2 (Erlöse pro Stück) Konstante sind, schneidet für $c_1 < c_2$ und $d_1 > d_2$ der Graph der

---

1 Zum Beweis vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 371 f.

Erlösfunktion für die Aktion a_1 den Graph der Erlösfunktion für die Aktion a_2 von unten in dem Punkt, in dem der Erlös von a_1 gleich dem Erlös von a_2 (Erlösschwelle p_c) ist. Somit wird dieser Punkt wie folgt bestimmt:

(4-15a) $$c_1 + d_1 \cdot p_c = c_2 + d_2 \cdot p_c \; ;$$

oder nach p_c aufgelöst:

(4-15b) $$p_c = \frac{c_2 - c_1}{d_1 - d_2} \; .$$

Der erwartete Erlös der Aktion a_1 ($E(a_1) = E(e_1)$) ist dann kleiner als der erwartete Erlös der Aktion a_2 ($E(a_2) = E(e_2)$), wenn der Erwartungswert der Zufallsvariablen P (E(P)) kleiner ist als die Erlösschwelle p_c. Wenn also

(4-16) $$E(P) < p_c = \frac{c_2 - c_1}{d_1 - d_2} \; , \text{ dann gilt:}$$

(4-16a) $$E(P) < \frac{c_2 - c_1}{d_1 - d_2} \; .$$

Da $d_1 - d_2 > 0$, läßt sich folgende Umformung vornehmen:

(4-17) $$E(P) \cdot (d_1 - d_2) < c_2 - c_1 \; .$$

Eine weitere Umformung ergibt:

(4-18) $$d_1 \cdot E(P) + c_1 < d_2 \cdot E(P) + c_2 \quad \text{bzw.}$$

(4-19) $$E(d_1 \cdot (P) + c_1) < E(d_2 \cdot (P) + c_2) \; .$$

Für $c_1 + d_1 \cdot (P)$ läßt sich nach (4-14a) e_1 und nach (4-14b) für $c_2 + d_2 \cdot (P)$ die Erlösfunktion e_2 einsetzen, so daß:

(4-20) $$E(e_1) < E(e_2) \; .$$

Da $E(e_1) = E(a_1)$ und $E(e_2) = E(a_2)$ folgt aus (4-20):

(4-21) $$E(a_1) < E(a_2) \; .$$

Für die Werte unseres Beispiels ergibt sich $E_o(P) = 0{,}05$ und $p_c = 0{,}055$, so daß aufgrund von (4-21) daraus folgt, daß der erwartete Erlös der Aktion a_2 größer ist als der der Aktion a_1. Gemäß der Bayesschen Entscheidungsregel sollte sich daher die Unternehmensführung gegen die Einführung des Gerätes entscheiden.

Wie bereits erwähnt, herrschte bei der Schätzung der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung für den möglichen Absatz von Videorecordern relativ große Unsicherheit, die sich in einer recht großen Streuung $\sigma_o(P) = 0,015$ ausdrückte. Deshalb wird die Unternehmensführung der Vereinigten Phonowerke versuchen, zusätzliche Informationen über den zu erwartenden Absatz zu erlangen, bevor sie sich aufgrund der A-priori-Informationen zur Nicht-Einführung des Videorecorders entschließt.

Unser Beispiel möge daher wie folgt abgewandelt werden: Von den $N = 20$ Mio Haushalten des Gesamtmarktes werden $n = 1.601$ Haushalte zufällig ausgewählt und befragt, ob sie das Aufzeichnungsgerät der Vereinigten Phonowerke innerhalb der nächsten fünf Jahre kaufen würden. Das der Untersuchung zugrunde liegende Merkmal sei X mit den Ausprägungen $x = 0$ (kein Kauf), $x = 1$ (Kauf eines Gerätes), $x = 2$ (Kauf von zwei Geräten) etc. Das Ergebnis dieser als Stichprobe interpretierbaren Umfrage sei:[1]

Mittelwert: $\bar{x} = 0,1$,

Standardabweichung: $s = 0,04$.

Analog zu den bisherigen Beispielen läßt sich dieses Stichprobenergebnis ebenfalls als bedingte Wahrscheinlichkeit (Likelihood) auffassen: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das beobachtete Stichprobenergebnis unter der Voraussetzung, daß von den $N = 20$ Mio Haushalten ein bestimmter Anteil p das Gerät zu kaufen beabsichtigt? Zur Beantwortung dieser Frage läßt sich nach dem Zentralen Grenzwertsatz[2] annehmen, daß die Mittelwerte $\bar{x}$ aller möglichen Stichproben vom Umfang $n = 1.601$ um den wahren Mittelwert der Grundgesamtheit mit einer Varianz von $\sigma^2_{\bar{x}}$

---

1 Hier sei ebenfalls angenommen, daß die bei der Umfrage geäußerten Absichten auch tatsächlich durchgeführt werden.

2 Der Zentrale Grenzwertsatz sagt aus, daß die Verteilung einer Summenvariablen z, gebildet aus einer Folge unabhängiger Zufallsvariabler x bei $n \to \infty$ gegen eine Normalverteilung strebt. Zum Zentralen Grenzwertsatz vgl. Günter Menges: Statistik 1 ..., a.a.O., S. 249 - 251.

normalverteilt sind. Die Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte bestimmt sich wie folgt:[1]

$$(4\text{-}22) \qquad \sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \cdot \sqrt{\frac{N-n}{N-1}} \quad ,$$

wobei σ die Standardabweichung der Grundgesamtheit darstellt. Da diese nicht bekannt ist, kann s als Schätzwert für σ verwendet werden,[2] wobei jedoch die Formel (4-22) um den sogenannten Bessel Korrekturfaktor[3] erweitert werden muß:

$$(4\text{-}22a) \qquad \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} \cdot \sqrt{1 - \frac{n}{N}} \quad .^{4)}$$

$$(4\text{-}22b) \qquad \hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{0{,}04}{\sqrt{1.601-1}} = \frac{0{,}04}{40} = 0{,}001.$$

Die Likelihoods $W(\bar{x}/p)$ als Wahrscheinlichkeiten dafür, daß man das Stichprobenergebnis $\bar{x}$ unter der Voraussetzung beobachtet hat, daß die stetige Zufallsvariable P (Anteil der Nachfrager am Gesamtmarkt) von p_u bis p_o läuft, lassen sich dann nach folgender Normalverteilung bestimmen:

$$(4\text{-}23) \qquad f_N(\bar{x};\, p,\, \hat{\sigma}^2_{\bar{x}}) \, .$$

Dabei gibt $\bar{x}$ den beobachteten Stichprobenmittelwert, p den Erwartungswert der Likelihood-Funktion, der über den gesamten Bereich der p-Werte läuft, und $\hat{\sigma}^2_{\bar{x}}$ die nach der Formel (4-22a) zu ermittelnde Varianz der Stichprobenmittelwerte an. Nach dem Bayesschen Theorem läßt sich aus der Likelihood-Normalverteilung in der Form (4-23) und aus der A-priori-Normalverteilung in der Form (4-5) die A-posteriori-Dichtefunktion für p unter der Voraussetzung, der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ wurde beobachtet, wie folgt angeben:

---

1 Vgl. Hans Kellerer: Stichprobenverfahren..., a.a.O., S. 40 ff.

2 Zur Schätzung von σ aus s vgl. John C. G. Boot and Edwin B. Cox: Statistical Analysis for Managerial Decisions. New York · St. Louis · San Francisco · London 1970, S. 224 - 227.

3 Als Bessel Korrektur bezeichnet man den Ausdruck $\sqrt{\frac{n}{n-1}}\sqrt{\frac{N-1}{N}}$, der dazu dient, daß s einen unverzerrten und konsistenten Schätzwert für σ liefert.

4 Ist der Auswahlsatz $n/N < 0{,}05$, kann der Ausdruck unter der zweiten Wurzel vernachlässigt werden.

$$(4\text{-}24)\quad f(p/\bar{x}) = \frac{f_N(p;\, E_o(P),\, \sigma_o^2(P)) \cdot f_N(\bar{x};\, p,\, \sigma_{\bar{x}}^2)}{\int_{-\infty}^{+\infty} f_N(p;\, E_o(P),\, \sigma_o^2(P)) \cdot f_N(\bar{x};\, p,\, \sigma_{\bar{x}}^2) \cdot dp} \quad .$$

Da eine Normalverteilung allein durch ihren Erwartungswert und ihre Varianz vollständig definiert ist und zudem die Summe oder das Produkt aus zwei Normalverteilungen meistens wieder eine Normalverteilung ergibt,[1] lassen sich der Erwartungswert und die Varianz der A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung, von der sich zeigen läßt, daß die Verteilung in der Form (4-24) ebenfalls eine Normalverteilung ist, direkt aus den Parametern der A-priori-Verteilung und der Likelihood-Verteilung berechnen. Ohne Beweis folgt für (4-24):[2]

$$(4\text{-}25)\quad f(p/\bar{x}) = f_N(p;\, E_1(P),\, \sigma_1^2(P)) .$$

Dabei bestimmen sich der A-posteriori-Erwartungswert $E_1(P)$ und die Varianz $\sigma_1^2(P)$ nach den folgenden Formeln, in die nur die Werte der A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung und der Likelihood-Funktion eingehen:[3]

$$(4\text{-}26)\quad E_1(P) = E_o(P) \cdot \frac{\sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_o^2(P)} + \bar{x} \cdot \frac{\sigma_o^2(P)}{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_o^2(P)} \quad ;$$

$$(4\text{-}27)\quad \frac{1}{\sigma_1^2(P)} = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} + \frac{1}{\sigma_o^2(P)} \quad .$$

Setzt man die Werte unseres Beispiels in die Gleichungen (4-26) und (4-27) ein, erhält man:

$$(4\text{-}26a)\quad E_1(P) = 0,05 \cdot \frac{(0,001)^2}{(0,001)^2 + (0,015)^2} + 0,1 \cdot \frac{(0,015)^2}{(0,001)^2 + (0,015)^2}$$

$$E_1(P) = 0,099796725 \approx 0,0998 \quad ;$$

---

1 Vgl. Günter Menges: Statistik 1..., a.a.O., S. 254.

2 Zur Ableitung vgl. u.a. John W. Pratt, Howard Raiffa and Robert Schlaifer: Introduction to Statistical Decision Theory. New York · St. Louis · San Francisco · Toronto · Sydney 1965, Chapter 16.4.1, S. 12 f. George Hadley: Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. San Francisco · Cambridge · London · Amsterdam 1967, S. 442 f.

3 Vgl. Kyohei Sasaki: Statistics for Modern Business Decision Making. Belmont (California) 1968, S. 385 f.

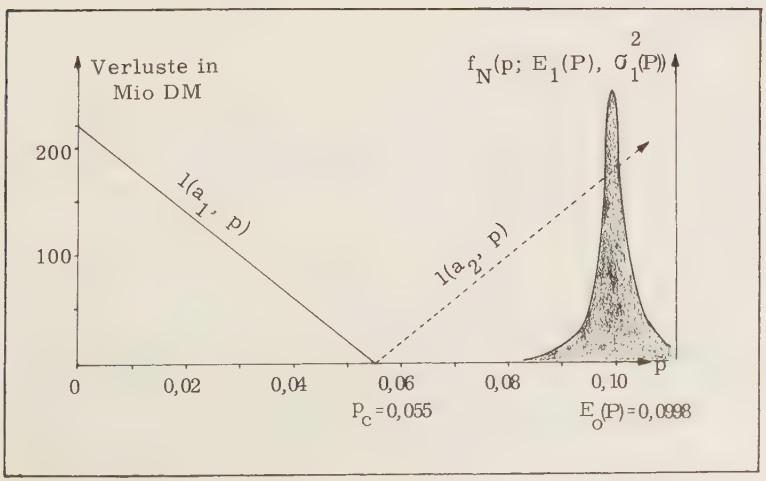
$$(4\text{-}27a) \qquad \frac{1}{\sigma_1^2(P)} = \frac{1}{(0,001)^2} + \frac{1}{(0,015)^2}$$

$$\sigma_1(P) = 0,000997785 \approx 0,001.$$

Aufgrund der Bayesschen Entscheidungsregel sollte sich die Unternehmensführung der Vereinigten Phonowerke auf der Basis der A-posteriori-Informationen für die Einführung des Videorecorders entscheiden, weil der A-posteriori-Erwartungswert für die Nachfrage $E_1(P)$ weitaus größer ist als die Erlösschwelle p_c: $E_1(P) = 0,0998 > p_c = 0,055$. Aus (4-20) folgt, daß der zu erwartende Erlös der Aktion a_1 kleiner ist als der der Aktion a_2. Das gleiche gilt vice versa für den zu erwartenden Verlust der beiden Aktionen. Die folgende Abbildung 4-5 möge die Begründung für die Entscheidung zur Einführung des Aufzeichnungsgerätes veranschaulichen. Es ist ersichtlich, daß nach Durchführung der Zusatzuntersuchung der erwartete Verlust für die Aktion a_1 annähernd gleich Null sein dürfte; dagegen ergibt sich für die Aktion a_2 ein erwarteter Opportunitätsverlust in Höhe des Integrals aus dem Produkt der Verlustfunktion für a_2 und der A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung.

Abbildung 4-5

Verlustfunktionen $l(a_i; p)$ und A-posteriori-Normalverteilung $f_N(p; E_1(P), \sigma_1^2(P))$



Zum Abschluß dieses Abschnitts soll auf die Sensibilität der Parameter der A-posteriori-Verteilung in bezug auf Änderungen der A-priori-Verteilung und des Stichprobenergebnisses eingegangen werden. Aus den Gleichungen (4-26) und (4-27) folgt, daß der A-posteriori-Erwartungswert $E_1(P)$ lediglich ein gewogener Durchschnitt aus dem A-priori-Erwartungswert $E_o(P)$ und dem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ ist, wobei die relativen Gewichte die durchschnittlichen Varianzen sind. Folglich muß sich die Summe der Gewichte zu eins ergänzen.

$$(4\text{-}28) \qquad 1 = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}} + \sigma_o(P)}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_o(P)}{\sigma_{\bar{x}} + \sigma_o(P)}\right)^2$$

Definiert man w als Symbol für die Gewichtung folgendermaßen:

$$(4\text{-}29) \qquad w = \left(\frac{\sigma_{\bar{x}}}{\sigma_{\bar{x}} + \sigma_o(P)}\right)^2 ,$$

so ergibt sich aus (4-28):

$$(4\text{-}30) \qquad 1 - w = \left(\frac{\sigma_o(P)}{\sigma_{\bar{x}} + \sigma_o(P)}\right)^2 .$$

Unter Einbeziehung von (4-27) lassen sich (4-29) und (4-30) auch schreiben:

$$(4\text{-}29a) \qquad w = \left(\frac{\sigma_1(P)}{\sigma_{\bar{x}}}\right)^2 ;$$

$$(4\text{-}30a) \qquad 1 - w = \left(\frac{\sigma_1(P)}{\sigma_o(P)}\right)^2 .$$

Die Formel zur Berechnung des A-posteriori-Erwartungswertes $E_1(P)$ - (4-26) - kann aufgrund von (4-29) und (4-30) auch wie folgt geschrieben werden:[1]

$$(4\text{-}26a) \qquad E_1(P) = w \cdot E_o(P) + (1 - w) \cdot \bar{x} .$$

---

1 Vgl. u.a. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 64 f.

Ist die Standardabweichung der A-priori-Verteilung $\sigma_o(P)$ relativ zu $\sigma_{\bar{x}}$ groß, wird dadurch das Gewicht w des A-priori-Erwartungswertes klein und folglich das Gewicht des Stichprobenmittelwertes groß, so daß der Stichprobenmittelwert weitgehend den A-posteriori-Erwartungswert bestimmt. Die Größe der Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte $\sigma_{\bar{x}}$ wird ihrerseits vom Stichprobenumfang n und der Varianz der Grundgesamtheit festgelegt, so daß unter Hinzuziehung der Formel (4-22) aus (4-30) folgt:

$$(4\text{-}30b) \qquad (1 - w) = \left(\frac{\sigma_o(P)}{\frac{s^2}{n} + \sigma_o(P)} \right)^2$$

Aus der Beziehung (4-30b) ist ersichtlich, daß mit zunehmendem Stichprobenumfang n die Gewichtung des Stichprobenmittelwertes $\bar{x}$ größer und wegen (4-28) die Gewichtung des A-priori-Erwartungswertes $E_o(P)$ kleiner wird. Das bedeutet, bei wachsendem Stichprobenumfang wird der Stichprobeninformation eine immer stärkere Bedeutung beigemessen, indem der A-priori-Erwartungswert kaum noch zur Bestimmung des A-posteriori-Erwartungswertes beiträgt. Damit wird auch für den "kontinuierlichen" Fall dieses Beispiels ein eventueller Einwand, eine falsche Einschätzung der Umweltzustände a priori könnte zu Fehlentscheidungen führen, entkräftet.

Die Gewichte, mit denen der A-priori-Erwartungswert und der Stichprobenmittelwert versehen werden, lassen sich auch als Maß für die Menge der zur Lösung des Entscheidungsproblems beigefügten Informationen interpretieren.[1]

---

1 Vgl. zum Konzept der Informationsmenge John W. Pratt et al.: Decision Theory ..., a.a.O., Chapter 16.4.2., S. 13 f. Ebenso Edgar A. Pessemier: New-Product Decisions. An analytical approach. Bd. 2 der Reihe: Perspectives in Marketing Series. Ed. R. D. Buzzel and F.M. Bass. New York · St. Louis · San Francisco · Toronto · London · Sydney 1966, S. 139 ff.

Diese Interpretation erscheint insofern plausibel, wenn man berücksichtigt, daß durch eine relativ große Standardabweichung a priori eine relativ große Unsicherheit ausgedrückt wird. Damit kann man die in $E_o(P)$ zusammengefaßte Informationsmenge a priori auch wie folgt bestimmen:

$$(4\text{-}31) \qquad I_o = \frac{1}{\sigma^2_o(P)} \; .$$

Analog dazu ergibt sich die in der Stichprobe zusammengefaßte Informationsmenge:

$$(4\text{-}32) \qquad I_s = \frac{1}{\sigma^2_{\bar{x}}} \; .$$

Ebenso folgt für die Informationsmenge des A-posteriori-Erwartungswertes:

$$(4\text{-}33) \qquad I_1 = \frac{1}{\sigma^2_1(P)} \; .$$

Aus der Gleichung (4-27) folgt:

$$(4\text{-}34) \qquad I_1 = I_o + I_s \; .$$

I_1 ist damit der a posteriori an Informationen zur Verfügung stehende Betrag. Die Beziehung (4-34) läßt sich auch in die Formel für den A-posteriori-Erwartungswert (4-26) einsetzen:

$$(4\text{-}35) \qquad E_1(P) = \frac{I_o \cdot E_o(P) + I_s \cdot \bar{x}}{I_o + I_s} \; .$$

Aus diesen informationstheoretischen Erwägungen folgt, daß die Informationsmenge, die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung

für die Umweltvariable zur Überwindung der Unsicherheit beiträgt, umso größer ist, je kleiner die Streuung dieser Wahrscheinlichkeitsverteilung ist. Läßt man z. B. den Stichprobenumfang n gegen N streben, so ist im Fall von n = N die Standardabweichung der Stichprobe s gleich der Standardabweichung der Grundgesamtheit σ, so daß sich die Informationsmenge der Stichprobe wie folgt bestimmt:

$$(4\text{-}36) \qquad I_s = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \frac{n}{\sigma^2} \cdot \frac{N - 1}{N - n} \quad .$$

In diesem Falle wäre I_s unendlich groß - ein Fall perfekter Information, der insofern einleuchtend ist, als man durch eine Untersuchung sämtlicher Elemente der Grundgesamtheit absolut sichere Kenntnisse über die Parameter der Grundgesamtheit haben müßte.

Zu der obigen Interpretationsweise der in die Bayessche Analyse eines Entscheidungsproblems eingehenden Streuungsmaße ist jedoch folgendes einzuwenden:

(1) Eine informationstheoretische Interpretation ist nicht mehr möglich, wenn die zusätzliche Information nicht in Form eines Stichprobenergebnisses vorliegt.

(2) Nicht allein der Stichprobenumfang, sondern auch die Auswahlkriterien und Erhebungsverfahren bestimmen den Informationswert einer Stichprobe.

(3) Die Streuung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung in Form der Standardabweichung muß nicht unbedingt ein Maß für den Ausdruck der Unsicherheit sein; eine relativ große Streuung kann auch durch die tatsächlichen Gegebenheiten der Untersuchungsgesamtheit bedingt sein.

Diese Kritikpunkte erscheinen jedoch nicht so schwerwiegend, daß diese Konzeption als Hilfsmittel zur Analyse der in ein Entscheidungskalkül eingehenden Informationen abgelehnt werden müßte.

4-3 Bayessche Prä-posteriori-Analyse als Instrument zur Einbeziehung der Informationskosten in das Entscheidungskalkül

Die Analyse der Entscheidungssituationen der bisherigen Beispiele hatte ergeben, daß es - da sich Unsicherheit und Information konträr gegenüberstehen - prinzipiell sinnvoll ist, neben den A-priori-Informationen weitere zusätzliche Informationen zu erlangen, wobei die Frage nach den eventuellen Informationskosten bisher vernachlässigt wurde.[1] Da dieser Untersuchung der Bayesschen Entscheidungslehre jedoch betriebswirtschaftliche Entscheidungen zugrunde liegen und Informationen selten kostenlos erhältlich sind, erscheint es notwendig zu prüfen, ob die Bayessche Entscheidungslehre folgende Fragen vom ökonomischen Standpunkt her berücksichtigen kann:

(1) Lohnt es sich überhaupt, zusätzliche Informationen zu erlangen; das heißt, übersteigt der Informationswert die Informationskosten?

(2) Bei positiver Beantwortung der ersten Frage: Welche Menge zusätzlicher Informationen soll eingeholt werden?[2]

Grundsätzlich kann die Beantwortung dieser Fragen durch eine marginalanalytische Untersuchung der Kosten und des Wertes einer Information geklärt werden. Wenn man davon ausgeht, daß der Informationswert in Abhängigkeit zur Menge der Informationen steigt und sich dabei dem theoretisch angenommenen Zustand vollkommener Information nähert, ohne ihn je zu erreichen, dann ist es solange lohnenswert, Informationen zu "kaufen", wie der Wert einer zusätzlichen Information größer ist als deren Kosten.

---

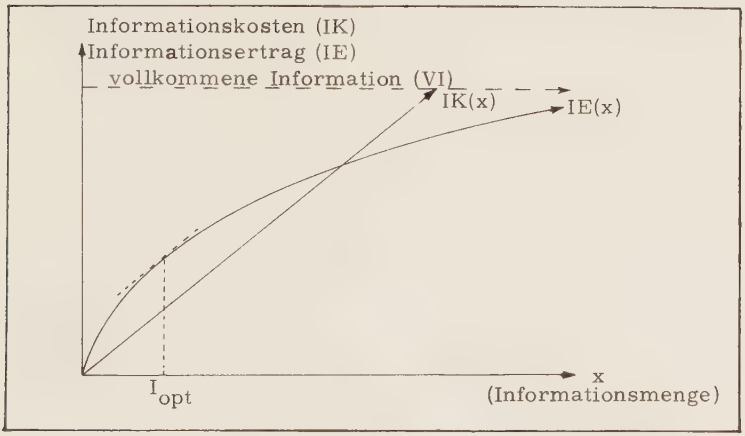
1 Die Frage nach den Kosten einer Zusatzinformation erschien bislang noch nicht so wichtig, weil im Kapitel 3 davon ausgegangen wurde, daß eine Stichprobe bei Unternehmensprüfungen sowieso gezogen wird.

2 Hier wird davon ausgegangen, daß die Kosten einer Information mit der Informationsmenge steigen.

Das Informationsoptimum ist dann erreicht, wenn der Wert und die Kosten einer Information gleich sind; oder graphisch gesehen, wenn die Steigung der Informationsertragskurve gleich ist der Steigung der Informationskostenkurve. Diesen Zusammenhang möge die folgende Abbildung 4-6 zeigen.

Abbildung 4-6

Graphische Darstellung des Informationsoptimums



Problematisch bei dieser Vorgehensweise ist die Bestimmung des Informationswertes und der Informationskosten a priori. Dabei erweisen sich die Informationskosten als leichter bestimmbar, wenn Marktbeobachtungen in Form von Befragungen auf Stichprobenbasis durchgeführt werden. Hier fallen neben den mit dem Stichprobenumfang steigenden Kosten auch durch die Planung und Vorbereitung der Stichprobe vom Stichprobenumfang unabhängige Kosten an, die man aufgrund des Datenmaterials der Vergangenheit ziemlich genau schätzen kann. Auch im Fall der Informationsgewinnung durch Testmarktergebnisse müßte durch eine Analyse der Kosten vergangener ähnlicher Tests oder Panelerhebungen[1] eine Aussage über die Höhe der zu erwartenden Informationskosten möglich sein.

---

1 Eine Panelerhebung liegt dann vor, wenn eine Personengruppe über einen längeren Zeitraum hinweg mehrfach befragt wird. Vgl. dazu Robert Nieschlag et al.: Absatzwirtschaft ..., a.a.O., S. 241 ff.

Weitaus schwieriger dagegen ist die Bestimmung des Informationswertes. Hier ergibt sich das Dilemma, daß sich der Wert einer Information erst dann bestimmen läßt, wenn man das Ergebnis der Informationsgewinnung ex ante kennt. Kennt man aber bereits das Ergebnis, ist es nicht mehr erforderlich, die Information zu gewinnen.[1]

Im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre ermittelt man den Wert einer Information als Differenz der Erwartungswerte der jeweils optimalen Aktion vor und nach der Beschaffung ei- A-posteriori-Information.[2] Dabei wird der Fall nach der Beschaffung der Information als hypothetisch betrachtet. Ein Anwachsen des Erwartungswertes nach Erhalt der Information wird als Informationswertzuwachs oder Beitrag zur Überwindung der Unsicherheit angesehen. Der maximale Informationswert ergibt sich als Differenz zwischen dem Erwartungswert der jeweils optimalen Aktion, die man gewählt hätte, wenn man a priori sichere Kenntnisse über die Umweltkonstellationen gehabt hätte ($E_s(a_{opt})$), und dem Erwartungswert der optimalen Aktion bei alleiniger A-priori-Information ($E_o(a_{opt})$). Diese Differenz wird auch als Erwartungswert der vollkommenen Information (E(VI)) bezeichnet, wobei auch eine Interpretation dieser Größe als Kosten der Unsicherheit oder einer Fehlentscheidung aufgrund unsicherer Erwartungen denkbar ist, wenn man berücksichtigt, daß bei Unterstellung häufiger Wiederholung der gleichen Situation der Entscheidende beim Treffen der Entscheidung auf Basis der A-priori-Information ex ante einen durchschnittlichen entgangenen Gewinn in Höhe des Erwartungswertes der vollkommenen Information hinnehmen muß.[3]

---

1 Vgl. Jürgen Wild: Zur Problematik der Nutzenbewertung von Informationen. In: ZfB, 41. Jg. (1971), S. 333.

2 Vgl. Frank M. Bass: Marketing Research Expenditures: A Decision Modell. In: Edgar A. Pessemier: New-Product Decisions ..., a.a.O., S. 124; subject to minor changes, reproduced from the JoB, January 1963, pp. 77 - 90.

3 Vgl. Robert Schlaifer: Business Decisions..., a.a.O., S. 76 und 320 f. Die A-priori-Wahrscheinlichkeiten werden hier als relative Häufigkeiten interpretiert, obgleich es sich um einmalige Situationen handelt. Zur Ermittlung des E(VI) erweist sich diese Betrachtungsweise jedoch als sinnvoll.

Der Erwartungswert der vollkommenen Information wird dann als Entscheidungskriterium zur Beantwortung der Frage benutzt, ob sich die Beschaffung zusätzlicher Informationen grundsätzlich lohnt; denn ein relativ kleiner Erwartungswert der vollkommenen Information weist daraufhin, daß die vorhandene Unsicherheit relativ klein ist und auch durch weitere Informationen nicht viel mehr reduziert werden kann. Vice versa bedeutet ein großer Erwartungswert der vollkommenen Information, daß die Beschaffung von Zusatzinformationen lohnenswert ist, wobei jedoch höchstens Informationskosten in Höhe des Erwartungswertes der vollkommenen Information entstehen dürfen.

Der Informationsgewinn jeder A-posteriori-Information wird aber die A-priori-Unsicherheit immer nur zum Teil reduzieren können,[1] so daß der Entscheidende die Kosten der Beschaffung einer Zusatzinformation gegen die Kosten einer Entscheidung auf Basis der A-priori-Information abwägen muß.[2] Dazu wird zunächst eine sogenannte A-posteriori-Analyse[3] des Entscheidungskalküls durchgeführt, bei der die Erwartungswerte der jeweils optimalen Aktionen unter der Bedingung des Eintritts aller alternativ möglicher Ergebnisse des Informationsbeschaffungsprozesses ermittelt werden.

An diese Analyse schließt sich die Bestimmung des Erwartungswertes der Entscheidung, eine bestimmte weitere Information zu beschaffen, an - die sogenannte Prä-posteriori-Analyse.[4] Hierbei nimmt man zur Bestimmung des Erwartungswertes der Information (E(I)) eine Gewichtung der bedingten Erwartungswerte der möglichen Aktionen a_i mit den Wahrscheinlichkeiten

---

1 Vgl. Karl Weber: Entscheidungsprozesse..., a.a.O., S. 78

2 Vgl. Paul E. Green: Uncertainty, Information and Marketing Decisions. In: Theory in Marketing. Ed. R. Cox, W. Alderson and S. J. Shapiro. Homewood (Illinois) 1964, S. 345.

3 Vgl. Frank M. Bass: Marketing Research ..., a.a.O., S. 126.

4 Vgl. Ronald E. Frank and Paul E. Green: Quantitative Methods in Marketing. Englewood Cliffs (New Jersey) 1967, S. 19.

dafür, die jeweils möglichen Informationsergebnisse zu erhalten, vor. Die Differenz zwischen dem Erwartungswert der Information und dem Erwartungswert der optimalen Aktion bei alleiniger A-priori-Information abzüglich der Informationskosten dient dann als Grundlage der Entscheidung über die Vorteilhaftigkeit der Zusatzinformation. Ist diese Differenz positiv, bedeutet das, daß der Entscheidende durchschnittlich mit dieser Zusatzinformation eine Aktion wählt, die zu einem höheren Ertrag führt, als beim Treffen der Entscheidung ohne diese Information. Diese Vorgehensweise soll im folgenden anhand eines zunächst einfachen Beispiels erläutert werden. In einem weiteren Beispiel wird dann das Problem auch auf den Fall einer kontinuierlichen Umweltvariablen ausgedehnt.

Die Unternehmensführung eines Unternehmens der Tabakindustrie plant, eine neue besonders nikotinarme Zigarettenmarke auf den Markt zu bringen. Somit besteht der Aktionsraum aus den Aktionen a_1 (= Einführung) und Aktion a_2 (= Nicht-Einführung der neuen Zigarettenmarke). Der Erfolg der beiden Aktionen hängt allein von der Höhe des erreichbaren Marktanteils ab. Von Einführungen neuer Zigarettenmarken in der Vergangenheit weiß man, daß die Reaktionen der Konsumenten auf die Einführung einer neuen Zigarette sich hauptsächlich in nur drei unterschiedlichen Marktanteilen äußern. Diese sind: $s_1 = 15\%$, $s_2 = 5\%$ und $s_3 = 0\%$ Marktanteil. Weiterhin sei angenommen, daß die Marktforschungsabteilung den verschiedenen Marktanteilen subjektive A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ zuordnen konnte. Diese Wahrscheinlichkeiten und die bedingten Gewinne bzw. Verluste sind in der folgenden Tabelle 4-5 angegeben.

Tabelle 4-5

A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ und bedingte Gewinne bzw. Verluste der Aktionen a_i in Mio DM

s_j	$s_1 = 15\%$	$s_2 = 5\%$	$s_3 = 0\%$
$W_o(s_j)$	0,6	0,1	0,3
a_1 = Einführung	5	1	-3
a_2 = Nicht-Einführung	0	0	0

Durch Multiplikation der bedingten Gewinne bzw. Verluste der Tabelle 4-5 mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten erhält man die a priori erwarteten Erträge der Aktionen a_i ($E_o(a_i)$), die in der folgenden Tabelle 4-6 wiedergegeben sind.

Tabelle 4-6

A-priori-Erwartungswerte der Aktionen a_i in Mio DM

$E_o(a_i)$ als Summe aus $W_o(s_j) \cdot$ bedingte Gewinne / Verluste

s_j	s_1	s_2	s_3	$E_o(a_i)$
a_1	3,0	0,1	-0,9	+2,2
a_2	0	0	0	0

Bevor die Unternehmensführung sich nun entschließt, zur Verringerung der a priori bestehenden Unsicherheit des Entscheidungskalküls zusätzliche Informationen zu beschaffen, kann sie durch die Ermittlung des Erwartungswertes der vollkommenen Information E(VI) den Betrag bestimmen, bis zu dem sich die Einholung weiterer Informationen lohnt. Der Erwartungswert der vollkommenen Information ergibt sich als Differenz zwischen dem Erwartungswert der jeweils optimalen Aktion bei unterstellter Sicherheit $E_s(a_{opt})$ und dem Erwartungswert der aufgrund der A-priori-Information optimalen Aktion $E_o(a_{opt})$. Zur Berechnung des Erwartungswertes der jeweils optimalen Aktion bei vollkommener Information ist von der Annahme sicherer Erwartungen auszugehen. Aus der Tabelle 4-5 folgt, daß die Unternehmensführung sich bei vollkommener Information im Falle des Eintretens von s_1 oder s_2 für die Aktion a_1 entscheiden würde, weil damit in beiden Fällen ein Gewinn von 5 Mio bzw. 1 Mio DM erzielt würde. Tritt dagegen der Umweltzustand s_3 mit Sicherheit ein, würde die Wahl auf Aktion a_2 fallen, deren Verlust in diesem Fall um 3 Mio DM kleiner wäre als der der Aktion a_1. Betrachtet man nun die Wahl der jeweils optimalen Aktion unter der Hypothese der mehrfachen Wiederholung, lassen sich die A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(s_j)$ der Tabelle 4-5 als relative Häufigkeiten der alternativ möglichen Umweltzustände s_j sehen. Das bedeutet, in 60% aller Fälle hätte

man 5 Mio DM Gewinn, in 10% aller Fälle 1 Mio DM Gewinn und in 30% aller Fälle keinen Gewinn erzielt. Damit berechnet man den Erwartungswert der jeweils optimalen Aktion bei vollkommener Information folgendermaßen:

(4-37) $E_s(a_{opt}) = 0,6 \cdot 5 + 0,1 \cdot 1 + 0,3 \cdot 0 = 3,1$ Mio DM.

Der Erwartungswert der optimalen Aktion bei alleiniger A-priori-Information ist gemäß der Tabelle 4-6 der Erwartungswert der Aktion a_1:

(4-38) $E_o(a_{opt}) = E_o(a_1) = 2,2$ Mio DM.

Aus der Differenz von (4-37) und (4-38) ergibt sich der Erwartungswert der vollkommenen Information wie folgt:

(4-39) $E(VI) = E_s(a_{opt}) - E_o(a_{opt}) = 3,1 - 2,2 = 0,9$ Mio DM.

Dieses Ergebnis besagt, daß sich die Beschaffung zusätzlicher Informationen bis zu einem Betrag von 900.000,- DM lohnen könnte; das bedeutet aber nicht, daß jede beliebige Information mit Kosten bis zu diesem Betrag eingeholt werden kann.

Zur Weiterführung unseres Beispiels sei nun angenommen, daß das Unternehmen die Möglichkeit hat, ein Marktforschungsinstitut mit einem Verbrauchertest zu beauftragen, dessen Kosten sich auf etwa 500.000,- DM belaufen. Ähnliche von diesem Institut durchgeführte Untersuchungen zeigten in der Vergangenheit meistens nur drei sich gegenseitig ausschließende Ergebnisse z_i (i = 1, 2, 3):

(1) z_1 = positive Aufnahme des Produkts bei den Testpersonen;
(2) z_2 = mittlere bis zögernde Bejahung des Produkts;
(3) z_3 = indifferente bis ablehnende Einstellung gegenüber dem neuen Artikel.

Daher glaubt man, auch bei diesem Verbrauchertest nur eins der drei obigen Ergebnisse erzielen zu können. Außerdem sei unterstellt, daß das Personal des Marktforschungsinstituts in der Lage ist, die bedingten Wahrscheinlichkeiten (Likelihoods) für das Auftreten dieser Testergebnisse unter der Voraussetzung,

daß einer der drei möglichen Umweltzustände s_j vorliegt, zu schätzen. Die Schätzwerte der Likelihoods sind der folgenden Tabelle 4-7 zu entnehmen.

Tabelle 4-7

Geschätzte Likelihoods der möglichen Testergebnisse $W(z_i/s_j)$

Testergebnisse (z_i)	$W(z_i/s_j)$	Umweltzustände in Marktanteilen		
		s_1 = 15%	s_2 = 5%	s_3 = 0%
z_1 = gut	$W(z_1/s_j)$	0,80	0,20	0,05
z_2 = mittel	$W(z_2/s_j)$	0,15	0,60	0,05
z_3 = schlecht	$W(z_3/s_j)$	0,05	0,20	0,90
$\sum$	•	1,00	1,00	1,00

Zur Klärung der Frage, ob der Wert dieser Zusatzuntersuchung die Kosten ihrer Beschaffung übersteigt, werden im Rahmen der A-posteriori-Analyse die bedingten A-posteriori-Erwartungswerte der Aktionen a_i ($E_1(a_i/z_i)$ berechnet. Bei diesen Erwartungswerten handelt es sich deshalb um bedingte Werte, weil sie nur unter der Voraussetzung gültig sind, daß jeweils eins der drei möglichen Testergebnisse erzielt wird. Im folgenden werden daher zunächst die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für alle Umweltzustände s_j und alle Testergebnisse z_i ($W_1(s_j/z_i)$) berechnet. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe der folgenden Tabelle 4-8, die zunächst die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten für das Zusammentreffen der einzelnen Umweltzustände mit den alternativ möglichen Testergebnissen ($W(s_j \cap z_i) = W(s_j) \cdot W(z_i/s_j)$) angibt. Nach dem Bayesschen Theorem werden zur Berechnung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten dann die gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten der Tabelle 4-8 durch die Summe der entsprechenden gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten dividiert. Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gibt diese Summe jeweils die unbedingte Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Testergebnisses z_i an, mit der später im Rahmen der Prä-posteriori-Analyse die bedingten Erwartungswerte gewichtet werden.

Tabelle 4-8

Gemeinsame Wahrscheinlichkeiten für die Umweltzustände s_j und die Testergebnisse z_i

$W(z_i/s_j)$	$W_o(s_1)$	$W_o(s_2)$	$W_o(s_3)$	$W(z_i)$
$W(z_1/s_j)$	0,48	0,02	0,015	0,515
$W(z_2/s_j)$	0,09	0,06	0,015	0,165
$W(z_3/s_j)$	0,03	0,02	0,270	0,320
$\sum$	0,60	0,10	0,300	1,000

Die Tabelle 4-8 gibt in der letzten Spalte unter $W(z_i)$ jeweils die Summe der gemeinsamen Wahrscheinlichkeiten wieder, durch die zur Ermittlung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten die einzelnen Werte der jeweiligen Reihe zu dividieren sind. Die Ergebnisse sind der folgenden Tabelle 4-9 zu entnehmen.

Tabelle 4-9

A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für alle Umweltzustände s_j bei Berücksichtigung aller möglichen Testergebnisse z_i

Testergebnisse	A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten			$\sum$
	$W_1(s_1/z_i)$	$W_1(s_2/z_i)$	$W_1(s_3/z_i)$	
z_1	0,9320	0,0388	0,0292	1,0000
z_2	0,5454	0,3637	0,0909	1,0000
z_3	0,0937	0,0625	0,8438	1,0000

Durch Muliplikation der bedingten Gewinne bzw. Verlust der Tabelle 4-5 mit den A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Tabelle 4-9 ergeben sich die bedingten Erwartungswerte der Aktion a_1 ($E_1(a_1/z_i)$) der folgenden Tabelle 4-10. Da die bedingten Ergebnisse der Aktion a_2 bei jedem Auftreten von s_j gleich Null sind, erübrigt sich eine besondere Berechnung der bedingten Erwartungswerte für die Aktion a_2.

Tabelle 4-10

Bedingte A-posteriori-Erwartunswerte der Aktion a_1 - $E_1(a_1/z_i)$

$W_1(s_j/z_i)$	s_1 e_{11} = 5 Mio	s_2 e_{12} = 1 Mio	s_3 e_{13} = -3 Mio	$E_1(a_1/z_i)$
$W_1(s_j/z_1)$	4,6600	0,0388	-0,0876	+4,6112
$W_1(s_j/z_2)$	2,7270	0,3637	-0,2727	+2,8180
$W_1(s_j/z_3)$	0,4685	0,0625	-2,5314	-2,0004

Der Tabelle 4-10 ist zu entnehmen, welche A-posteriori-Erwartungswerte sich für die Aktion a_1 jeweils in Verbindung mit einem der alternativ möglichen Testergebnisse ergeben würden. So sagt z.B. der Wert des ersten Feldes mit 4,66 Mio DM aus, daß sich die bei Wahl der Aktion a_1 und Vorliegen des Umweltzustandes s_1 ergebenden Gewinne in Höhe von 5 Mio DM in $W_1(s_1/z_1)$ = 93,2% aller Fälle erzielen lassen, wenn das Testergebnis z_1 = positive Aufnahme des Produkts beobachtet wird. Da z_1 aber auch vorkommen kann, wenn tatsächlich s_2 oder s_3 vorliegt, werden die bedingten Gewinne bzw. Verluste bei diesen Umweltzuständen mit den entsprechenden A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten unter der Voraussetzung von z_1 ($W_1(s_2/z_1)$ bzw. $W(s_3/z_1)$) gewichtet (1 Mio · 0,0388 bzw. -3Mio · 0,0292), so daß der A-posteriori-Erwartungswert der Aktion a_1 = 4,6112 Mio DM beträgt, wenn man das Testergebnis z_1 beobachten würde. In dem vorliegenden Fall sind die bedingten Erwartungswerte der Aktion a_1 für die Testergebnisse z_1 und z_2 positiv und für z_3 negativ. Da die bedingten Erwartungswerte der Aktion a_2 alle gleich Null sind, bedeutet das, daß unter der Hypothese, der Markttest würde tatsächlich durchgeführt, für ein Testergebnis von z_1 oder z_2 die Aktion a_1 und bei einem Testergebnis von z_3 die Aktion a_2 als optimale Aktion gewählt werden sollte.

Im Anschluß an die obige A-posteriori-Analyse erfolgt die Präposteriori-Analyse, die der eigentlichen Ermittlung des zu erwartenden Informationswertes dient. Dazu werden die bedingten

Erwartungswerte der jeweils für die möglichen Testergebnisse optimalen Aktion mit den Wahrscheinlichkeiten für das Auftreten dieser Testergebnisse $W(z_i)$[1] gewichtet und summiert.[2] Diese als Erwartungswert von Erwartungswerten interpretierbare Größe stellt den Erwartungswert der Information E(I) dar.[3] Dieses Vorgehen erfolgt aufgrund der Überlegung, daß vor der Durchführung eines Informationsbeschaffungsprozesses das Ergebnis dieses Prozesses wiederum eine Zufallsvariable Z mit den Ausprägungen z_i ist, für die eine Wahrscheinlichkeitsverteilung existiert. Die Entscheidung darüber, ob das Testverfahren durchgeführt werden soll, hängt von der Differenz zwischen dem Erwartungswert der Information E(I) und dem Erwartungswert der optimalen Aktion vor Beschaffung dieser Information $E_o(a_{opt})$ abzüglich der Informationskosten IK ab. Diese Differenz ist gleichzeitig der Netto-Erwartungswert der Information $E_{net}(I)$, deren Beschaffung sich nur bei einem positiven Wert von $E_{net}(I)$ lohnt.[4]

$$(4\text{-}41) \qquad E_{net}(I) = E(I) - E_o(a_{opt}) - IK .$$

In der folgenden Tabelle 4-11 wird die Berechnung des Erwartungswertes der Information für unser Beispiel vorgenommen.

Tabelle 4-11

Berechnung des Erwartungswertes der Information E(I)

z_i	$W(z_i)$	optimale Aktion a_i wenn z_i vorliegt	$E_1(a_i/z_i)$	E(I)
z_1	0,515	a_1	4,6112	2,374768
z_2	0,165	a_1	2,8180	0,464970
z_3	0,320	a_2	0,0000	0,000000
$\sum$	1,000	•	•	2,839738

1 Es handelt sich hier um die unbedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der einzelnen Testergebnisse (Tabelle 4-8).

2 Auf die Zulässigkeit der Betrachtung aus der Sicht relativer Häufigkeiten wurde bereits hingewiesen.

3 Für E(I) findet man in der amerikanischen Literatur die Bezeichnungen: "expected terminal profit", "expected value of sample information" und "maximum expected utility for an experiment".

4 Für $E_{net}(I)$ findet man den Ausdruck "expected net gain from sampling" im amerikanischen Schrifttum.

Aus der Tabelle 4-11 ergibt sich ein Erwartungswert für die Durchführung des Verbrauchertests von E(I) = 2.839.738 Mio DM. Der Erwartungswert der a priori optimalen Aktion a_1 betrug: $E_o(a_{opt}) = E_o(a_1) = 2,2$ Mio DM. Die Informationskosten waren mit IK = 0,5 Mio DM angegeben. Entsprechend der Formel (4-41) läßt sich jetzt der Netto-Erwartungswert der Testmarktuntersuchung berechnen:

(4-41a) $E_{net}(I) = 2,839738 - 2,2 - 0,5 = 0,139738$ Mio DM.

Ein Netto-Erwartungswert der Information in Höhe von etwa 140.000,- DM bedeutet, daß die Unternehmensführung bei unterstellter mehrmaliger Wiederholung der gleichen Situation im Durchschnitt 140.000,- DM mehr an Gewinn machen würde, wenn sie eine Entscheidung aufgrund der A-priori-Informationen und der zusätzlichen Information in Form der Testmarkterhebung treffen würde. Daher sollte die Unternehmensführung sich zur Durchführung des Verbrauchertests entschließen.

In komplexeren Entscheidungssituationen, vor allem bei mehreren zur Auswahl stehenden Informationsbeschaffungsmöglichkeiten, kann die tabellarische Ermittlung der obigen Erwartungswerte schnell zu umfangreich und damit unübersichtlich werden.[1] In solchen Fällen eignet sich zur Analyse des anstehenden Entscheidungsproblems die Ausarbeitung eines Baumdiagramms[2] oder "Bayesschen Fächers"[3]. Zum Abschluß dieses Beispiels soll daher das hier zur Diskussion stehende Entscheidungsproblem anhand eines Baumdiagramms dargestellt werden.

---

1 Vgl. Karl Weber: Projektanalyse zur Einführung eines neuen Produktes unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: ZfbF, N.F., 19. Jg. (1967), S. 420.

2 Zur Aufstellung von Baumdiagrammen für Entscheidungsprobleme vgl. John F. Magee: Decision Trees for Decision Making. In: Haward Business Review, Vol. 42 (1964), S. 126 ff.

3 Diese Bezeichnung findet man bei Karl Weber: Entscheidungsprozesse ..., a.a.O., S. 75. In der amerikanischen Literatur bezeichnet man solche Baumdiagramme als "decision trees".

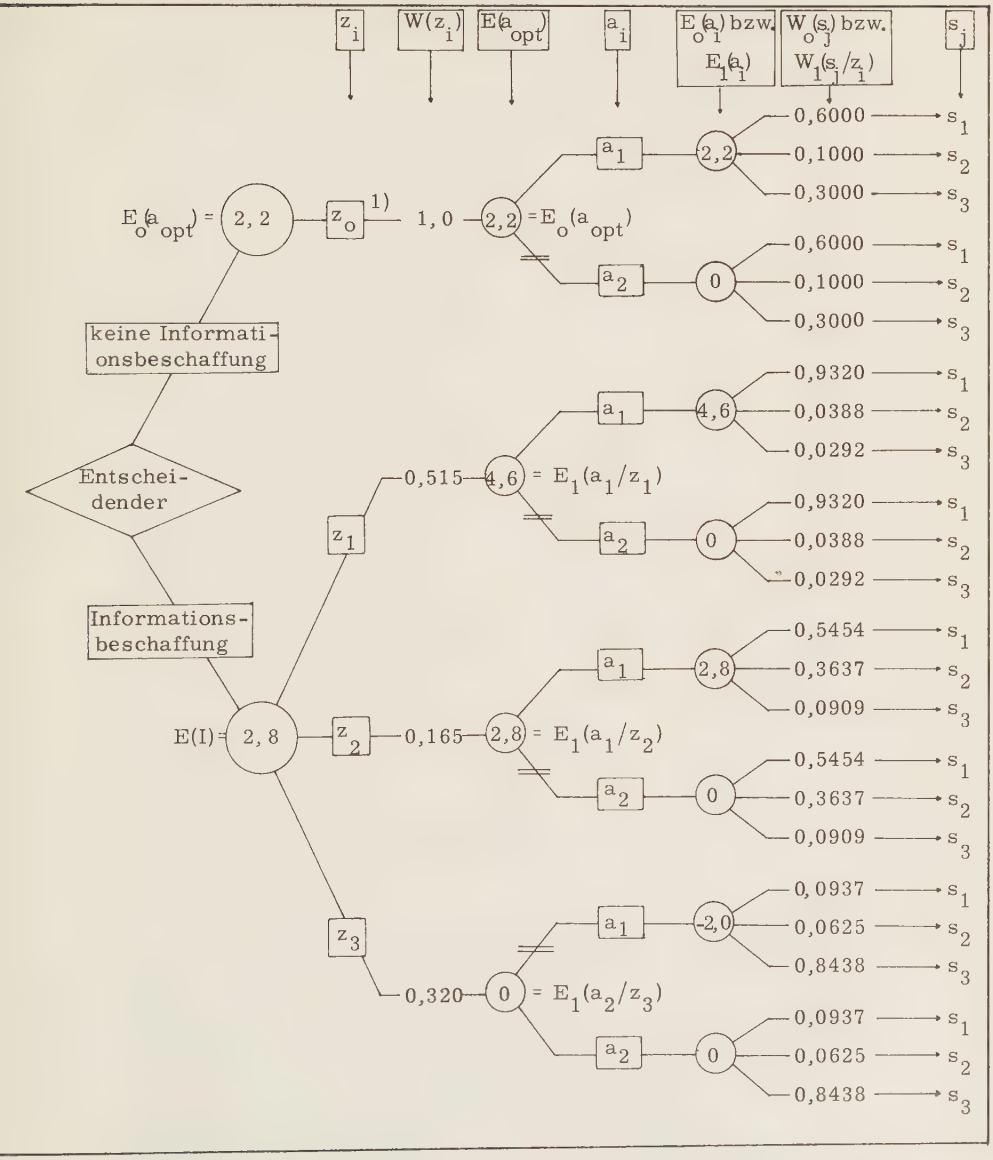
Die nebenstehende Abbildung 4-7 stellt die Entscheidungssituation zur Einführung einer neuen Zigarettenmarke unseres Beispiels anhand eines "Bayesschen Fächers" schematisch dar. Im Ausgangspunkt dieses Entscheidungsbaums steht der Entscheidende vor der Wahl, entweder sich zusätzliche Informationen in Form des Verbrauchertests zu "kaufen", wobei ihn ein durchschnittlicher Gewinn in Höhe von $E(I) \approx 2,8$ Mio DM erwartet, oder ohne weitere Informationen (z_o) allein auf der Basis seines A-priori-Wissens sofort eine endgültige Entscheidung[1] mit einem Erwartungswert von $E_o(a_{opt}) = E_o(a_1) = 2,2$ Mio DM zu treffen. Daher erweist sich die Beschaffung der Zusatzinformation "Markttest" so lange als vorteilhaft, wie die Kosten der Informationsbeschaffung IK die Differenz zwischen $E(I)$ und $E_o(a_{opt}) = 2,8 - 2,2 = 0,6$ Mio DM nicht übersteigen. Da die Informationskosten mit IK = 0,5 Mio DM unter diesem Betrag liegen, sollte der Entscheidende ex ante den Ast "Informationsbeschaffung" wählen. Hier können sich drei mögliche Testergebnisse z_1, z_2 und z_3 ereignen, die mit einer Wahrscheinlichkeit von $W(z_1) = 0,515$, $W(z_2) = 0,165$ und $W(z_3) = 0,320$ eintreffen. Sollten die Testergebnisse z_1 oder z_2 beobachtet werden, führt das zur Wahl der Aktion a_1 mit einem Erwartungswert von $E_1(a_1/z_1) \approx 4,6$ Mio DM bzw. $E_1(a_2/z_2) \approx 2,8$ Mio DM. Sollte dagegen das Ergebnis des Tests z_3 sein, wäre in diesem Falle die Aktion a_2 mit einem Erwartungswert von $E_1(a_2/z_3) = 0$ die optimale Aktion, da der Erwartungswert der Aktion a_1 hier $E_1(a_1/z_3) \approx -2,0$ Mio DM beträgt. Auf jeder Entscheidungsstufe wählt also der Entscheidende den Ast mit dem höchsten Erwartungswert. Dabei werden die anderen Aktionsmöglichkeiten nicht mehr in Betracht gezogen, was in der Abbildung 4-7 durch einen Doppelstrich durch den Ast dieser Aktion gekennzeichnet wurde.

---

1 Im amerikanischen Schrifttum werden Entscheidungen, die schließlich zu einer Aktion und nicht zur Informationsbeschaffung führen, "terminal decisions" = endgültige - oder Letztentscheidung genannt.

Abbildung 4-7

Baumdiagramm zum Entscheidungsproblem der Einführung einer neuen Zigarettenmarke



1 Das Informationsergebnis z_o dient nur zur Vervollständigung der logischen Struktur des Baumdiagramms. Bei Wahl der Aktion "keine Informationsbebeschaffung" ergibt sich auch kein Informationsergebnis ($=z_o$), dessen Wahrscheinlichkeit: $W(z_o) = 1$ ist.

Da die Modellvoraussetzungen des Beispiels der Einführung einer neuen Zigarettenmarke durch die Beschränkung auf nur drei mögliche Umweltzustände und nur drei alternativ mögliche Informationsergebnisse die allgemeine Gültigkeit der Bayesschen Prä-posteriori-Analyse zur Berücksichtigung der Informationskosten in Frage stellen, soll anhand des nun folgenden Beispiels das Problem der Einbeziehung von Informationskosten in das Entscheidungskalkül für den Fall einer kontinuierlich verteilten Umweltvariablen und bei Unterstellung von linearen Erlösfunktionen erörtert werden. Dazu sei folgendes angenommen: Ein Hersteller von Tiefkühlkost plant die Aufnahme eines neuen Artikels, dessen Produktion ihm jährlich fixe Kosten in Höhe von c = 480.000,- DM verursachen würde. Der Absatzpreis soll so kalkuliert werden, daß mit einem Erlös je Packung von d = 0,20 DM zu rechnen ist. Sein Absatzmarkt besteht aus N = 20.000 Einzelhändlern, die monatlich bei ihm bestellen, so daß die durchschnittliche monatliche Absatzmenge des neuen Artikels für den Hersteller die unbekannte Umweltvariable S mit einem Erwartungswert von $E_o(S)$ und einer Wahrscheinlichkeitsfunktion von f(s) ist. Die beiden möglichen Aktionen sind:

a_1 = Einführung des neuen Produktes mit einer Erlösfunktion von:

(4-42a) $e(a_1, s) = -480.000 + (20.000 \cdot 12) \cdot 0,2 \cdot s = e_1$;

a_2 = keine Einführung des geplanten Artikels mit:

(4-42b) $e(a_2, s) = 0 = e_2$.

Die Markforschungsabteilung unterstellt für die Gestalt der Wahrscheinlichkeitsfunktion f(s) eine Normalverteilung $f_N(s; E_o(S), \sigma_o^2(S))$. Dabei schätzt sie den durchschnittlichen Absatz pro Händler und Monat auf acht (8) Packungen mit einer Standardabweichung von fünf (5) Packungen. Die durchschnittliche Standardabweichung der anderen Produkte, die zusammen als Grundgesamtheit zu interpretieren sind, beträgt drei (3) Packungen. Damit ist:

$$E_o(S) = 8;\ \sigma_o(S) = 5;\ \sigma = 3.$$

Aufgrund dieser Ausgangsdaten läßt sich mit der in Abschnitt 4-2 für zwei lineare Erlösfunktionen und eine kontinuierlich verteilte Umweltvariable dargestellten Entscheidungsregel durch Vergleich des Erwartungswertes der Umweltvariablen mit der Erlösschwelle ($E(S) \lesseqgtr s_c$) direkt eine Entscheidung treffen. Die Erlösschwelle s_c liegt dort, wo der Erlös der Aktion a_1 gleich dem Erlös der Aktion a_2 ist, also:

(4-43) $$0 = -480.000 + 48.000 \cdot s_c$$
$$s_c = 10.$$

Da der A-priori-Erwartungswert $E_o(S)$ kleiner ist als die Erlösschwelle: $E_o(S) = 8 < s_c = 10$, sollte aufgrund alleiniger A-priori-Informationen der Tiefkühlkost-Hersteller den neuen Artikel nicht produzieren.

Da der Hersteller jedoch an der Zuverlässigkeit der Schätzung der A-priori-Verteilung zweifelt, möchte er vor dem Treffen einer endgültigen Entscheidung lieber einen Markttest durchführen, bei dem probeweise einen Monat lang $n = 500$ zufällig ausgewählte Händler mit dem neuen Artikel beliefert werden. Unsicherheit herrscht jedoch darüber, ob der Informationswert dieses Tests die Informationskosten, die sich mit 50,- DM pro Händler auf $IK = 50 \cdot 500 = 25.000,-$ DM belaufen, übersteigt. Zur Lösung dieses Entscheidungsproblems geht man ähnlich vor wie in unserem Beispiel über die Einführung einer neuen Zigarettenmarke. Zunächst bestimmt man den Erwartungswert der vollkommenen Information E(VI), um festzustellen, bis zu welchem Betrag Informationskosten überhaupt aufgewendet werden sollten. Dazu ist die Differenz aus dem Erwartungswert der jeweils optimalen Aktion bei unterstellter Sicherheit $E_s(a_{opt})$ und dem Erwartungswert der optimalen Aktion bei alleiniger A-priori-Information $E_o(a_{opt})$ zu bilden. Für den Fall einer kontinuierlich verteilten A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Umweltvariable und zweier linearer Erlösfunktionen, von denen die Erlösfunktion der Aktion a_1 die Erlösfunktion von a_2 von unten schneidet (Bedingung: $c_1 < c_2$ und $d_1 > d_2$),

kann der Erwartungswert der vollkommenen Information E(VI) aufgrund folgender Überlegungen berechnet werden: Ist wie in dem vorliegenden Beispiel der A-priori-Erwartungswert $E_o(S)$ kleiner als die Erlösschwelle s_c, ist bei alleiniger A-priori-Information a_2 die optimale Aktion: $E_o(a_{opt}) = E_o(a_2)$.[1] Bei unterstellter Sicherheit würde die Aktion a_2 für den Bereich der Umweltvariablen, in dem s_j kleiner ist als s_c, die bessere Aktion sein. Ist dagegen s_j größer als s_c, erweist sich die Aktion a_1 als optimal. Das bedeutet, der Erwartungswert der jeweils optimalen Aktion bei unterstellter Sicherheit $E_s(a_{opt})$ ist gleich dem Integral der Erlösfunktion für die Aktion a_2 multipliziert mit der A-priori-Verteilung in den Grenzen von $-\infty$ bis s_c und dem Integral aus dem Produkt der Erlösfunktion der Aktion a_1 und der A-priori-Verteilung zwischen s_c und $+\infty$. Für den A-priori-Erwartungswert bei alleiniger A-priori-Information gilt dann das Integral aus der Erlösfunktion der Aktion a_2 multipliziert mit der A-priori-Verteilung in den Grenzen von $-\infty$ bis $+\infty$. Gemäß der Gleichung (4-39) läßt sich nun der Erwartungswert der vollkommenen Information im "kontinuierlichen" Fall wie folgt bestimmen:

(4-39) $E(VI) = E_s(a_{opt}) - E_o(a_{opt})$ wird im "kontinuierlichen" Fall:

$$(4\text{-}44)\quad E(VI) = \left(\int_{-\infty}^{s_c} e_2 \cdot f_N(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)) + \int_{s_c}^{+\infty} e_1 \cdot f_N(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)) - \int_{-\infty}^{+\infty} e_2 \cdot f_N(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)) \right) ds.$$

Die Gleichung (4-44) läßt sich folgendermaßen zusammenfassen:

$$(4\text{-}45)\quad E(VI) = \int_{s_c}^{+\infty} (e_1 - e_2) \cdot f_N(s;\, E_o(S),\, \sigma_o^2(S))\, ds\,.$$

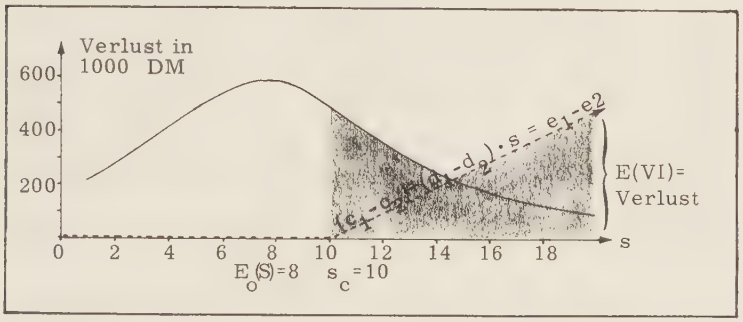
Die Differenz zwischen der Erlösfunktion für die Aktion a_1 und der Erlösfunktion für die Aktion a_2 der Gleichung (4-45) ist identisch mit der Verlustfunktion der Aktion a_2 für den Bereich s_j größer s_c ($l(a_2, s)$), weil sich bei der Wahl der Aktion a_2 wegen $E_o(S) < s_c$ ein Verlust für alle $s_j > s_c$ in Form entgangener Gewinne ergibt. Diesen Zusammenhang möge die folgende Abbildung 4-8 verdeutlichen.

---

1 Für den Fall $E_o(S) > s_c$ gelten diese Überlegungen vice versa analog.

Abbildung 4-8

Darstellung des Erwartungswertes der vollkommenen Information E(VI) für den kontinuierlichen Fall



Setzt man in die Gleichung (4-45) für e_1 und e_2 die folgenden linearen Erlösfunktionen der allgemeinen Form unter Berücksichtigung der Bedingung: $c_1 < c_2$ und $d_1 > d_2$,

(4-46a) $e(a_1, s) = e_1 = c_1 + d_1 \cdot s$ und

(4-46b) $e(a_2, s) = e_2 = c_2 + d_2 \cdot s$,[1]

ein, so ergibt sich nach einigen Umformungen:[2]

$$(4\text{-}47)\quad E(VI) = |d_1 - d_2| \left[\int_{s_c}^{+\infty} \left(s - E_o(S) \right) \cdot f_N\left(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)\right) \cdot ds + \left(E_o(S) - s_c \right) \cdot \int_{s_c}^{+\infty} f_N\left(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)\right) ds \right]$$

Unter Berücksichtigung von:

$$(4\text{-}48)\quad f_N(s; E_o(S), \sigma_o^2(S)) = \frac{1}{\sigma_o(S)\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - E_o(S)}{\sigma_o(S)}\right)^2} \quad \text{und}$$

$$(4\text{-}49)\quad z = \frac{|s - E_o(S)|}{\sigma_o(S)} \qquad \text{bzw.}$$

weil $E_o(S) = \text{const.}$: $ds = \sigma_o(S) \cdot dz$ und somit:

---

1 Es handelt sich hier um die gleiche Bedingung wie bei der Ableitung des Beweises (4-20) bzw. (4-21), als nachgewiesen wurde, daß bei $E_o(P) < p_c$: $E_o(a_1) < E_o(a_2)$.

2 Eine Ableitung des E(VI) für den kontinuierlichen Fall unter Berücksichtigung aller Rechenschritte soll hier nicht erfolgen. Zur genauen Ableitung vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 378 - 381.

(4-49a) $$z_c = \frac{(|s_c - E_o(S)|)}{\sigma_o(S)} ,$$

wird aus (4-47):

(4-50) $$E(VI) = (|d_1 - d_2|)\,\sigma_o(S)\cdot\left[\left(\int_{s_c}^{+\infty} \frac{z}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz\right) - \left(z_c \int_{s_c}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{z^2}{2}} \cdot dz\right)\right] .$$

Die Werte des Ausdrucks in eckigen Klammern in der Formel (4-50), der als "normale Verlustfunktion L_N" bezeichnet wird,[1] sind allein abhängig von z_c (Formel (4-49a)) und daher leicht tabellierbar.[2] Somit kann die Formel (4-50) vereinfachend wie folgt geschrieben werden:

(4-51) $$E(VI) = (|d_1 - d_2|)\cdot\sigma_o(S)\cdot L_N(z_c) .$$

Aus (4-51) ergibt sich, daß der Erwartungswert der vollkommenen Information:[3]

(1) sich proportional zur absoluten Differenz der Steigungen b (= Erlös pro Stück) beider Erlösfunktionen verhält;

(2) proportional mit zunehmendem $\sigma_o(S)$ wächst;

(3) durch die Formel (4-49a) umgekehrt proportional zur absoluten Differenz zwischen dem A-priori-Erwartungswert $E_o(S)$ und der Erlösschwelle s_c ist.

Wie bereits erwähnt, läßt sich der Erwartungswert der vollkommenen Information auch als Kosten der Fehlentscheidung aufgrund alleiniger A-priori-Information interpretieren. Das bedeutet, daß bei sehr stark voneinander abweichenden Erlösen pro Stück der beiden Aktionen a_1 und a_2 man leicht ohne weitere Informationen eine Fehlentscheidung treffen kann, was sich durch einen relativ großen E(VI) ausdrückt. Je ähnlicher dagegen die bedingten Erlöse der beiden Aktionen sich sind, desto kleiner wird das Risiko einer Fehlentscheidung a priori (= relativ kleiner E(VI)). Die A-priori-Standardabweichung hatten wir schon als Maß für die Unsicherheit interpretiert; daher ist es verständlich, daß mit zunehmender Unsicherheit auch die Kosten einer Fehlentscheidung steigen.

---

1 Vgl. Kyohei Sasaki: Decision Making..., a.a.O., S. 372.

2 Eine Tabelle der Werte von L_N in Abhängigkeit von z_c findet man bei Robert Schlaifer: Business Decisions..., a.a.O., S. 370 f.

3 Vgl. Kyohei Sasaki: Decision Making..., a.a.O., S. 372 f.

Auch die Tatsache, daß der Erwartungswert der vollkommenen Information mit zunehmender Differenz zwischen dem A-priori-Erwartungswert und der Erlösschwelle kleiner wird, dürfte einleuchtend sein, weil durch eine große Differenz ausgedrückt wird, daß selbst bei einer Fehlschätzung des A-priori-Erwartungswertes die gewählte Aktion weiterhin die bessere ist. Damit ist auch das Risiko einer Fehlentscheidung relativ klein. Liegt dagegen der A-priori-Erwartungswert relativ nah bei der Erlösschwelle, kann schon bei einer geringen Verschätzung die gewählte Aktion die falsche sein, so daß in diesem Fall das Risiko einer Fehlentscheidung relativ groß ist.

Für unser Beispiel ergibt sich gemäß der Formel (4-51) folgender Erwartungswert der vollkommenen Information:

(4-51 $E(VI) = (|48.000 - 01|) \cdot 5 \cdot 0,2304$[1] $= 55.296,-$ DM

Daraus folgt, daß eine Informationsbeschaffung generell bis zu einem Betrag von etwa 55.000,- DM lohnenswert ist.

Die Kosten des vorgeschlagenen Markttests liegen mit IK = $50 \cdot 500 = 25.000,-$ DM zwar unter dem Betrag von $E(VI) \approx 55.000,-$ DM, jedoch heißt das nicht, daß diese Information tatsächlich ihre Beschaffungskosten wert ist. Dazu ist die Berechnung des Erwartungswertes der (Stichproben-)Information erforderlich. Da ex ante das Stichprobenergebnis als Zufallsvariable aufzufassen ist, existiert für jedes mögliche Stichprobenergebnis eine andere A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsverteilung für die Umweltvariable S, deren Mittelwert $E_1(S)$ wieder eine Zufallsvariable ist. Die Verteilung dieser Zufallsvariablen wird als Prä-posteriori-Verteilung bezeichnet.[2] Für den hier unterstellten Fall einer normalverteilten Umweltvariablen und nor-

---

1 Der Wert für $L_N(z_c) = 0,2304$ ist der Wert für L_N bei $z_c = 0,4$: $z_c = \frac{|8-10|}{5} = 0,4$. Abgelesen bei Robert Schlaifer: Business Decisions..., a.a.O., S. 370.

2 Vgl. Kyohei Sasaki: Decision Making..., a.a.O., S. 390.

malverteilter Stichprobenmittelwerte läßt sich zeigen,[1] daß die Prä-posteriori-Verteilung eine Normalverteilung ist mit einem Erwartungswert von:

(4-52) $E_1(S) = E_o(S)$ und einer Varianz von:

(4-53) $$\sigma_1^2(S) = \frac{\sigma_o^2(S) \cdot \sigma_o^2(S)}{\sigma_o^2(S) + \frac{\sigma^2}{n}} \quad .^{2)}$$

Unter Benutzung der Gleichungen (4-52) und (4-53) läßt sich der Erwartungswert der Information analog zum Erwartungswert der vollkommenen Information ermitteln:

(4-54) $$E(I) = (|d_1 - d_2|) \cdot \sigma_1(S) \cdot L_N(z_{c1}) \quad .$$

Dabei läßt sich z_{c1} analog zu z_c (Formel: (4-49a)) berechnen:

(4-55) $$z_{c1} = \frac{|s_c - E_1(S)|}{\sigma_1(S)} \quad .$$

Für unser Beispiel ergibt sich dann der folgende Erwartungswert der Information durch Einsetzen folgender Werte in (4-54)

(4-52a) $E_o(S) = E_1(S) = 8$.

(4-53a) $$\sigma_1(S) = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 5^2}{5^2 + \frac{3^2}{500}}} = \sqrt{\frac{625}{25,018}} = \sqrt{24,982} = 4,998 \quad .$$

(4-55a) $$z_{c1} = \frac{|10 - 8|}{4,998} = 0,40016$$

$$L_N(0,4) = 0,2304$$

(4-54a) $E(I) = (|48.000 - 0|) \cdot 4,998 \cdot 0,2304 = 55.273,- \text{ DM}$

Subtrahiert man jetzt vom Erwartungswert der Information die Informationskosten erhält man für den "kontinuierlichen" Fall den Netto-Erwartungswert der Information:

(4-56) $E_{net}(I) = E(I) - IK$.

---

1 Die Ableitung der Prä-posteriori-Verteilung und des E(I) bzw. $E_{net}(I)$ soll hier nicht gezeigt werden. Stattdessen sei verwiesen auf John W. Pratt et al.: Decision Theory ..., a.a.O., Chapter 16.6. und 16.9.2.

2 Die in der Formel enthaltene Varianz der Grundgesamtheit ist entweder mittels einer Vorstichprobe zu schätzen oder wie in unserem Beispiel mit $\sigma = 3$ bekannt

Für unser Beispiel ergibt sich:

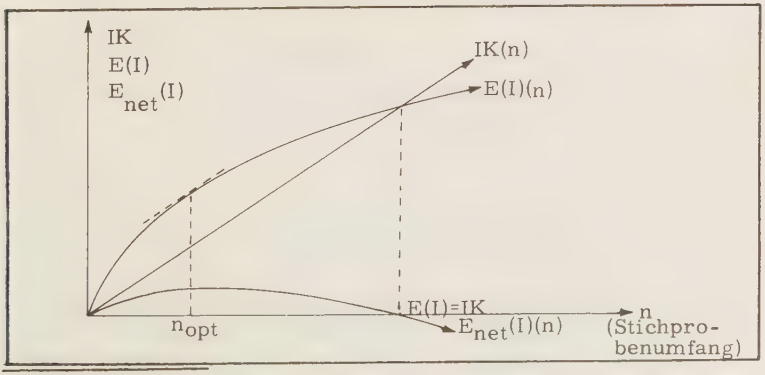
(4-56a) $E_{net}(I) = 55.273 - 25.000 = 30.273,- \text{ DM}$.

Dieses Ergebnis zeigt an, daß der Tiefkühlkost-Hersteller die Kosten einer Fehlentscheidung auf Basis der A-priori-Information (Wiedergegeben durch: E(VI) = 55.296,- DM) durch den Markttest um $E_{net}(I) = 30.273,-$ DM reduzieren kann. Das bedeutet, bei Durchführung dieses Tests wird er im Durchschnitt einen um ca. 30.000,- DM höheren Gewinn erzielen.

In unserem Beispiel wurde lediglich der Fall eines gegebenen Stichprobenumfangs (n = 500) betrachtet. Variiert man dagegen den Stichprobenumfang n, ergibt sich für jedes n ein anderer Erwartungswert der Stichprobeninformation und andere Informationskosten. Unter der Voraussetzung, daß die Informationskosten sich proportional zu n verhalten, kann man annehmen, daß die Kurve der Erwartungswerte der Information in Abhängigkeit zu n in irgendeinem Punkt die gleiche Steigung aufweist wie die Kurve der Informationskosten. Dieser Punkt gibt gleichzeitig das Maximum der Kurve der Netto-Erwartungswerte der Information an und bestimmt damit den optimalen Stichprobenumfang n_{opt}. Diesen Zusammenhang möge die folgende Abbildung 4-9 verdeutlichen.[1]

Abbildung 4-9

Erwartungswert der Information, Netto-Erwartungswert der Information und Informationskosten in Abhängigkeit zu n



1 Ein allgemein gültiger Verlauf dieser Kurven existiert nicht, weil $E_{net}(I)$ von zu vielen Größen abhängt, wie die folgende Formel (4-58) zeigt.

Unter der Voraussetzung, daß die Stichprobenkosten allein vom Umfang der Stichprobe n und den variablen Informationskosten k abhängen, lassen sie sich wie folgt definieren:[1]

$$(4\text{-}57) \quad IK(n) = k \cdot n \,.$$

Unter Benutzung von (4-57) läßt sich der Netto-Erwartungswert der Information (Formel: (4-56)) auch wie folgt schreiben:

$$(4\text{-}58) \quad E_{net}(I) = (|d_1 - d_2|) \cdot \sigma_1(S) \cdot L_N(z_{c1}) - k \cdot n \,.$$

In der Gleichung (4-58) hängt z_{c1} und $\sigma_1(S)$ von n ab, weil nach (4-55a) z_{c1} von $\sigma_1(S)$ und $\sigma_1(S)$ nach (4-53) von n abhängig ist. Außerdem hängt $E_{net}(I)$ noch von folgenden Konstanten: s_c, b_1-b_2, $E_o(S)$, $\sigma_o(S)$, σ und k ab, deren Abhängigkeit untereinander nach den folgenden Beziehungen besteht:[2]

$$(4\text{-}49a) \quad z_c = \frac{|s_c - E_o(S)|}{\sigma_o(S)} \qquad \text{und}$$

$$(4\text{-}59) \quad z_o = \frac{\sigma_o(S)}{\sigma} \cdot \sqrt[3]{\frac{(|d_1 - d_2|) \cdot \sigma}{k}} \,.$$

Für die verschiedenen Werte von z_c und z_o existieren Nomogramme, aus denen man eine Größe n^* ermitteln kann, die selbst nicht der optimale Stichprobenumfang n_{opt} ist, sondern den optimalen Wert der folgenden Beziehung zwischen dem Stichprobenumfang n und dem Wurzelausdruck der Gleichung (4-59) angibt:[3]

$$(4\text{-}60) \quad n^* = \frac{n}{\left(\sqrt[3]{\frac{(|d_1 - d_2|) \cdot \sigma}{k}}\right)^2} \,.$$

Aus (4-60) läßt sich der optimale Stichprobenumfang bestimmen:

$$(4\text{-}61) \quad n_{opt} = n^* \left(\sqrt[3]{\frac{(|d_1 - d_2|) \cdot \sigma}{k}}\right)^2 \,.$$

---

1 Der Fall fixer Informationskosten soll hier nicht besonders betrachtet werden. Vgl. hierzu Robert Schlaifer: Business Decisions..., a.a.O., S. 335.

2 Zur Ableitung der Bestimmungsgrößen des optimalen Stichprobenumfangs vgl. Robert Schlaifer: ebenda, S. 329 f.

3 Solche Nomogramme findet man bei Robert Schlaifer: ebenda, Anhang, chart I und bei William S. Peters and Georg W. Summers: Statistical Analysis for Business Decisions. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968, S. 249.

Für unser Beispiel kann der optimale Stichprobenumfang wie folgt ermittelt werden:

(4-49b) $z_c = 0,4$ (wurde bereits ermittelt)[1]

(4-59a) $z_o = \frac{5}{3} \cdot \sqrt[3]{\frac{(48.000 - 0) \cdot 3}{50}} = \frac{5}{3} \cdot 14,23 = 23,716 .$

Für $z_c = 0,4$ und $z_o = 23,716$ läßt sich nun aus einem Nomogramm für n^* der folgende Wert ablesen:[2]

(4-60a) $n^* = 0,086 .$

Aus diesen Werten läßt sich n_{opt} nach der Formel (4-61) berechnen.

(4-61a) $n_{opt} = 0,086 \cdot 14,23^2 = 17,41 .$

Dieses Ergebnis besagt, daß der Tiefkühlkost-Hersteller mit einer Stichprobe vom Umfang n = 17 durchschnittlich den größten Informationsgewinn erzielen würde. Vergleicht man jetzt den Netto-Erwartungswert der Information einer Stichprobe vom Umfang n = 17 mit dem einer Stichprobe vom Umfang n = 500, ergibt sich:

(4-58a) $E_{net}^{(I)}{}_{(n=17)} = (48.000 - 0) \cdot 4,947 \cdot 0,2304 - (17 \cdot 50) = 53.860$ DM

Die in die Formel (4-58) eingehenden Größen sind dabei:

(4-53b) $\sigma_1(S) = \frac{25 \cdot 25}{25 + \frac{9}{25}} = 4,947;$

(4-55b) $z_{c1} = \frac{10 - 8}{4,947} = 0,404 ;$

Für $z_{c1} = 0,404$ läßt sich folgender Wert der normalen Verlustfunktion $L_N(z_{c1})$ ablesen:

$$L_N(0,404) \approx 0,2304 .$$

Die Werte für d_1=48.000 DM, d_2=0, n=17 und k=50 DM an Testkosten wurden bereits ausreichend erläutert. Nach (4-56a) ergab sich für n=500 ein Netto-Erwartungswert der Information von:

(4-56a) $E_{net}^{(I)}{}_{(n=500)} = 30.273$ DM.

Es ist also durch die Wahl von $n_{opt} = 17$ im Vergleich zu n = 500 eine erhebliche Steigerung des durchschnittlichen Informationsgewinns in Höhe von 53.860 - 30.273 = 23.587 DM eingetreten.

---

1 Vgl. S. 129 Fußnote 1.

2 Abgelesen bei Robert Schlaifer: Business Decisions..., Anhang, Chart I.

4-4 Zusammenfassende Beurteilung der Bayesschen Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen

Wie die Ergebnisse der vorstehenden Abschnitte 4-2 und 4-3 zeigen, führt die Bayessche Entscheidungslehre zu objektiven und eindeutigen Lösungen eines für den Absatzbereich typischen Entscheidungsproblems, der Entscheidung über die Einführung eines neuen Produktes. Dabei ist eine analoge Übertragung der vorgestellten Lösungskonzeptionen auch auf ähnliche Entscheidungsprobleme im Absatzsektor möglich. So weisen z.B. die folgenden Marketing-Entscheidungen verwandte Problemstrukturen auf und lassen sich demzufolge auch analog mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre lösen:

(1) preispolitische Entscheidungen;[1]

(2) Entscheidungen über die Durchführung von Werbemaßnahmen;[2]

(3) Entscheidungen über Produkt- und Verpackungsänderungen;[3]

(4) Distributionsentscheidungen.[4]

---

1 Vgl. dazu die Untersuchungen von Green über preispolitische Entscheidungen bezüglich des Absatzpreises einer Kunstfaser in der chemischen Industrie. Paul E. Green: Intra-firm Applications ..., a.a.O., S. 78 ff. derselbe: Bayesian Decision Theory in Pricing Strategy. In: Journal of Marketing, Vol. 27 (1963), S. 5 - 14. derselbe: An Application of Bayesian Decision Theory to a Problem in Long Range Pricing Strategy. In: Journal of the American Statistical Association, Vol. 54 (1962) S. 30 -34. Wroe Alderson and Paul E. Green: Marketing ..., a.a.O., S. 161 ff.

2 Vgl. Paul E. Green: Bayesian Decision Theory in Advertising. In: Journal of Advertising Research, Vol. 2 (1962), S. 33 - 41.

3 Vgl. Paul E. Green: Marketing Decisions ..., a.a.O., S. 345 - 352 und Richard Kühn: Möglichkeiten rationaler Entscheidung im Absatzsektor unter besonderer Berücksichtigung der Information. Bd. 5 der Schriftenreihe "Prüfen und Entscheiden" des Betriebswirtschaftlichen Instituts Bern. Hrsg. von W. Müller. Bern und Stuttgart 1969, S. 127 ff.

4 Vgl. Wroe Alderson and Paul E. Green: Marketing ..., a.a.O., S. 311 - 317.

Als einer der wesentlichen Vorteile der Bayesschen Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen erweist sich die Möglichkeit der Einbeziehung einer kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen für die Umweltzustände in das Entscheidungskalkül, da besonders im Absatzbereich die wirklichkeitsfremde Prämisse - nur einige wenige Absatzausprägungen sind möglich - einer Anwendung der Bayesschen Verfahren auf Entscheidungssituationen der Praxis entgegensteht. Die Wahl einer Normalverteilung als Wahrscheinlichkeitsverteilung des zu erwartenden Absatzes bietet außerdem folgende bedeutende Vorteile:

(1) Die Ermittlung der subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten ist wesentlich einfacher vorzunehmen, weil der Entscheidende nur den Erwartungswert und die Varianz oder anstelle der Varianz eine Wahrscheinlichkeit für einen Bereich um den Erwartungswert zu schätzen braucht.

(2) Die Berechnung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ist ohne mathematische Schwierigkeiten oder großen Rechenaufwand mittels der Formeln (4-26) und (4-27) zu bewältigen.[1]

Hinzu kommt, daß mit einem normalverteilten zu erwartenden Absatz die Gegebenheiten der Praxis recht gut getroffen werden oder durch eine Normalverteilung approximiert werden können, so daß auch aus dieser Sicht nichts gegen die Unterstellung einer normalverteilten Umweltvariablen einzuwenden sein dürfte.

Die gleichzeitige Unterstellung der bedingten Entscheidungskonsequenzen in Form von kontinuierlichen Kosten- bzw. Erlösfunktionen, deren als linear angenommener Verlauf vielen empirisch ermittelten Funktionen entsprechen dürfte,[2] ermög-

---

1 Vgl. S. 104.

2 Zur Linearität von empirisch ermittelten Gesamtkostenkurven vgl. Erich Gutenberg: Die Produktion ..., a.a.O., S. 378 - 382 und die dort zitierte Literatur.

licht eine Analyse der Erlösschwelle für das Entscheidungskalkül unter der Berücksichtigung von Wahrscheinlichkeitsaspekten. Mit der Einbeziehung linearer Kostenfunktionen in das Entscheidungsmodell ist ein weiterer Vorteil verbunden: die einfache Bestimmung der optimalen Aktion durch einen Vergleich des Erwartungswertes der Zufallsvariablen "Absatz" mit dem Break-even-Punkt.

Jedoch lassen sich gegen dieses Lösungsverfahren Kritikpunkte vorbringen, die sich einerseits gegen die Einbeziehung einer Break-even-Analyse und anderseits gegen die Prämissen des gesamten Entscheidungsmodells richten:[1]

(1) Die praktische Ermittlung der Produktionskosten zur Aufstellung einer Kostenfunktion für ein erst noch zu produzierendes Produkt ist nur aufgrund von Schätzungen möglich. Weiterhin können die in die Berechnung eingehenden Größen (Kosten und Preise) für den Planungszeitraum nicht als konstant angesehen werden. Vielmehr dürfte in den einzelnen Phasen des Lebenszyklus[2] eines Produkts mit fallenden Absatzpreisen und fallenden stückvariablen Kosten bedingt durch den Lernprozeß der Produktion gerechnet werden können.

(2) Der unterschiedliche zeitliche Anfall von Kosten und Erlösen wird nicht berücksichtigt.

(3) Den Auswirkungen eventueller Änderungen des geplanten Marketing-Mix[3] kann nicht Rechnung getragen werden.

---

1 Zur Kritik der allgemeinen Break-even-Analyse vgl. u.a. Philip Kotler: Computer Simulation in the Analysis of New-Product Decisions. In: Applications of the Sciences in Marketing Management. Ed. by F. M. Bass, C. W. King and E. A. Pessemier. New York · London · Sydney 1968, S. 286 ff.

2 Der Lebenszyklus ist dadurch gekennzeichnet, daß der Absatz in Abhängigkeit zur Zeit nach Überwindung anfänglicher Marktschwierigkeiten einem Höhepunkt zustrebt und dann langsam absinkt. Die Preispolitik wird je nach Produkt und Markt in den einzelnen Phasen unterschiedlich sein. Vgl. dazu Paul E. Green and Donald S. Tull: Research for Marketing Decisions. 2nd. ed. Englewood Cliffs (New Jersey) 1970, S. 115 f.

3 Als Marketing-Mix bezeichnet man die optimale Kombination der Marketing-Aktivitäten.

(4) Mögliche Auswirkungen des neuen Produkts auf die Gewinnbeiträge der anderen Produkte werden nicht erfaßt.

Der Kritikpunkt (1) läßt sich weitgehend entkräften, wenn man die Break-even-Analyse nicht über den gesamten Lebenszyklus des Produkts durchführt, sondern eine Aufgliederung für die einzelnen Phasen vornimmt. Dadurch wird eine besondere Berücksichtigung der sich im Zeitverlauf ändernden Preise und Kosten möglich. Das daneben existierende Schätzproblem der Kosten- und Erlösfunktion ließe sich eventuell dadurch lösen, daß man mit für unterschiedlich glaubwürdig gehaltenen Kosten- bzw. Erlösgrößen rechnet, mit denen man gleichzeitig eine Sensibilitätsanalyse des Entscheidungsproblems vornehmen könnte. Dem Argument der Vernachlässigung des unterschiedlichen Anfalls der Kosten und Erlöse (Kritikpunkt (2)) kann man entgegenhalten, daß diese Tatsache bereits durch diskontierte Gewinne bzw. Verluste berücksichtigt wird. Darüber hinaus könnte man den unterschiedlichen zeitlichen Anfall durch besondere Abschläge bei den geplanten Absatzpreisen in das Entscheidungskalkül einbauen. Den möglichen Auswirkungen von Änderungen im Marketing-Mix (Kritikpunkt (3)) oder den Auswirkungen auf die Gewinnbeiträge (Kritikpunkt (4)) kann allerdings im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre nicht Rechnung getragen werden. Da aber diese Auswirkungen in den meisten Fällen nicht besonders schwerwiegend sind, läßt sich die damit vorgetragene Kritik ohne weiteres vernachlässigen.[1]

Die möglichen Einwände gegen die Prämissen der Bayesschen Analyse von Marketing-Entscheidungen sind größtenteils schon geklärt, indem bezüglich der Unterstellung von linearen Erlösfunktionen und einer kontinuierlich verteilten Umweltvariablen auf die Verhältnisse der Realität hingewiesen wurde. Zu bemer-

---

1 Die Einbeziehung eines festgelegten Marketing-Mix in Form fixer Kosten (z.B. Werbebudget oder Verteilungsbudget) ist natürlich möglich.

ken ist, daß auch bei Unterstellung einer anderen kontinuierlichen Verteilung als der Normalverteilung weiterhin die Lage des Erwartungswertes der Umweltvariablen zur Lage des Break-even-Punktes zur Entscheidungsfindung von Bedeutung ist; lediglich könnten sich dann Schwierigkeiten bei der Berechnung des A-posteriori-Erwartungswertes ergeben.

Als letzter Kritikpunkt der Prämissen bleibt die Beschränkung auf nur zwei mögliche Aktionen.[1] Für den Fall der Entscheidung über die Einführung eines neuen Produktes ist diese Einschränkung jedoch bedeutungslos.[2]

Damit läßt sich das in diesem Kapitel vorgestellt Konzept der Bayesschen Entscheidungslehre nur wieder durch eine Verneinung der Zulässigkeit subjektiver Wahrscheinlichkeiten in Frage stellen. Die Ablehnung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten führt aber besonders im Marketing zu der Schwierigkeit, daß sich objektive Wahrscheinlichkeiten nur schwer ermitteln lassen, da die Zufallsvariable "Absatz" noch gar keinen festen Wert angenommen hat. Sämtliche Stichprobenuntersuchungen versuchen damit zu klären, was die Verbraucher zu tun beabsichtigen.[3] Häufig fällt jedoch Absicht und späteres tatsächliches Handeln auseinander, so daß die mit den Ergebnissen solcher Untersuchungen gewonnenen Wahrscheinlichkeiten keinesfalls wirklich objektiv sind. Werden Stichprobenbeobachtungen aber zu Bestärkung oder Infragestellung subjektiver A-priori-Wahrscheinlichkeiten verwendet, dürfte das mit dem Bayesschen Theorem erhaltene Ergebnis dieser Mischung in Form objektivierter A-

---

1 Eine Ausdehnung auf den Fall von drei möglichen Aktionen wird bei T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 372 ff. kurz erläutert. Da diesem Fall die gleichen Überlegungen zugrunde liegen, ist auf eine Darstellung in dieser Untersuchung verzichtet worden.

2 Das gleiche gilt für Verpackungsänderungen und ähnliches.

3 Mögliche Verfahren zur Prognostizierung der Nachfrage können hier nicht mehr behandelt werden. Stattdessen sei verwiesen auf William F. Massy: Forecasting the demand for New Convenience Products. In: Application of Management Sciences in Marketing. Ed. by D. B. Montgomery and G. L. Urban. Englewood Cliffs (New Jersey) 1970, S. 442 - 455.

posteriori-Wahrscheinlichkeiten durchaus "glaubwürdig" erscheinen. Außerdem ist zu berücksichtigen, daß sich in den subjektiven Wahrscheinlichkeiten die Erfahrung und das Fingerspitzengefühl von Führungskräften wiederspiegelt, auf deren Informationsgehalt man andernfalls völlig verzichten würde. Welchen Beitrag zur Gesamtinformation die A-priori-Informationen liefern, läßt sich auch für den Einzelfall gemäß der Formel (4-34) bestimmen.

Neben den bereits genannten Vorteilen bietet das Bayessche Konzept einen weiteren Vorzug, nämlich die Möglichkeit zu prüfen, ob vor einer endgültigen Entscheidung zusätzliche Informationen beschafft werden sollten, und - bei positiver Beantwortung dieser Frage - welche von mehreren zur Verfügung stehenden Informationsmöglichkeiten gewählt und wieviele Informationen davon beschafft werden sollten. Die dabei vorgenommene Methode zur Bestimmung des Informationswertes auf der Basis von Erwartungswerten erweist sich als sinnvoll, weil nur so die Unsicherheit des Eintreffens der möglichen Informationsergebnisse erfaßt werden kann. Außerdem kann angenommen werden, daß bei Anwendung dieser Methode durchschnittlich bei allen Entscheidungen, die im Verlauf des Unternehmensgeschehens getroffen werden bessere Ergebnisse erzielt werden, als wenn man auf eine derartige quantitative Analyse des Entscheidungskalküls verzichten würde. Da darüber hinaus die Prä-posteriori-Analyse bereits v o r der Beschaffung einer Information durchgeführt werden kann, wird eins der häufig gegen die Bayessche Entscheidungslehre vorgebrachten Argumente, erst nach Vorliegen des Informationsergebnisses könne dessen Notwendigkeit beurteilt werden, hinfällig. Allerdings läßt es sich nicht vermeiden, daß bisweilen die Zusatzinformation zu derselben optimalen Aktion führt, die bei alleiniger A-priori-Information auch zu wählen gewesen wäre. Jedoch wird eine solche Entscheidung aufgrund z u v e r l ä s s i g e r e r Informationen getroffen mit dem psychologischen Neben-

effekt, daß der Entscheidende nun leichter die optimale Aktion wählen wird, wenn er in seiner vielfach nur vage vorgenommenen Einschätzung der Umwelt durch das Ergebnis der zusätzlichen Information bestärkt wird.

Ein weiterer Kritikpunkt am informationstheoretischen Konzept liegt in der Unterstellung, daß die Bestimmung aller möglichen Informationsergebnisse und ihrer bedingten Wahrscheinlichkeiten möglich ist. Handelt es sich um Zusatzinformationen in Form von Stichproben, denen eine binäre Fragestellung zugrunde zu legen ist, lassen sich ohne weiteres die möglichen Ergebnisse antizipieren und über ein theoretisches Verteilungsgesetz ihre bedingten Wahrscheinlichkeiten berechnen. Unter Umständen ist wie im Fall des Beispiels der Einführung einer neuen Zigarettenmarke auch eine subjektive Schätzung der gesuchten Likelihoods denkbar, wenn genügend Erfahrungswerte zu Verfügung stehen. Im "kontinuierlichen" Fall unter der Annahme einer normalverteilten Umweltvariablen und normalverteilter Stichprobenmittelwerte ist die Bestimmung der Informationswerte sogar völlig unproblematisch, so daß auf ihrer Basis der optimale Stichprobenumfang unter ökonomischen Gesichtspunkten festgelegt werden kann. Sollen jedoch Informationen beschafft werden, die zur Beantwortung quantitativ nicht erfaßbarer Fragen dienen, ist die hier vorgestellte Methode zur Informationswertberechnung nicht mehr anwendbar.

Als letzter Einwand gegen die Bayessche Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen ist die Tatsache anzusehen, daß eine mögliche Veränderung der Umwelt zwischen der Aufstellung des Entscheidungskalküls und der Informationsbeschaffung nicht berücksichtigt werden kann.[1] Häufig wird aber

---

1 Vgl. Günter Menges: Entscheidungen unter Risiko und Ungewißheit. In: Entscheidung und Information. Einführung in moderne Entscheidungskalküle und elektronische Informationssysteme mit Beiträgen von G. Menges, H. Schneeweiß H. Hax und O. H. Poensgen. Hrsg. von G. Menges. Frankfurt am Main · Berlin 1968, S. 32 f.

gerade durch eine Konsumentenbefragung oder einen Markttest eine Beeinflussung der Käufer vorgenommen. Die Berücksichtigung dieser Möglichkeit dürfte aber wohl keinem Entscheidungsmodell gelingen, so daß eine Ablehung der Bayesschen Entscheidungslehre unter diesem Aspekt nicht gerechtfertigt erscheint. Vielmehr sprechen die Vorteile der Verfahren, die im folgenden zusammengefaßt werden, für die praktische Anwendbarkeit der Bayesschen Entscheidungslehre bei Marketing-Entscheidungen.

(1) Durch Einbeziehung sämtlicher Absatzmöglichkeiten in Form einer kontinuierlichen Umweltvariablen und sämtlicher ökonomischer Konsequenzen[1] durch die Aufstellung von Erlösfunktionen wird eine vollständige Analyse des Entscheidungsproblems gewährleistet.[2]

(2) Durch die Kombination des Urteilsvermögens und der Erfahrungen von Führungskräften mit den Untersuchungsergebnissen der Marktforschungsabteilung werden alle zur Verfügung stehenden Informationen ausgeschöpft. Gleichzeitig dürfte der Austausch von Informationen zu einer effizienteren Zusammenarbeit zwischen der Marktforschungsabteilung und dem Management als Entscheidungsträger führen.[3]

---

1 Green spricht hier von "a usefull bridge between conventional statistical reasoning and economic reasoning". Paul E. Green: Marketing Decisions ..., a.a.O., S. 353. Ähnlich äußert sich Harry V. Roberts: Bayesian Statistics in Marketing. In: Journal of Marketing, Vol. 27 (1963) S. 4.

2 "Der große Vorteil ... der 'Bayes' Entscheidungstheorie' besteht darin, daß sie einen zweckmäßigen gedanklichen Rahmen bietet, um den Zusammenhang zwischen allen Argumenten, die zu diesem Problemkreis geäußert werden, abzuklären." Richard Kühn: Möglichkeiten rationaler Entscheidung ..., a.a.O., S. 152.

3 Vgl. Paul E. Green and Donald S. Tull: Research ..., a.a.O., S. 599. Ronald E. Frank and Paul E. Green: Quantitative Methods ..., a.a.O., S. 23 f.

(3) Das informationstheoretische Konzept bietet ein sinnvolles Verfahren zur Abwägung der Kosten gegen den Wert einer Information für ein bestimmtes Entscheidungsproblem, wodurch unter ökonomischen Aspekten geklärt werden kann, ob und welche Informationen beschafft werden sollten.[1]

(4) Die Bestimmung des optimalen Stichprobenumfangs geschieht nicht im Hinblick auf eine bestimmte Aussagesicherheit der Beobachtung wie in der Klassischen Statistik, sondern allein aufgrund ökonomischer Erwägungen.[2]

---

1 "Die Durchrechnung alternativer Informationsmöglichkeiten und Informationskosten vor der Fällung der endgültigen Entscheidung stellt einen Ansatz für die Abschätzung der Kosten zur Verminderung der Unsicherheit dar." Bruno Tietz: Grundlagen der Handelsforschung. Marketing Theorie. Bd. 1: Die Methoden. Rüschlikon 1969, S. 858.

2 An der Klassischen Statistik wird hauptsächlich das Festhalten an den schon fast "heiligen" Signifikanzniveaus von 0,95 oder 0,99 kritisiert. Vgl. u.a. Paul E. Green: Marketing Decisions ..., a.a.O., S. 353; Harry V. Roberts: Bayesian Statistics ..., a.a.O., S. 4.

5 ANWENDUNGSMÖGLICHKEITEN DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE BEI ENTSCHEIDUNGEN IM PRODUNKTIONSBEREICH

5-1 Bayessche Lösung des Problems der Maschineneinstellung als sequentielles Entscheidungsverfahren

Allgemein gilt der Produktionsprozeß als Kombination der Produktionsfaktoren Arbeit, Werkstoffe und Betriebsmittel.[1] Neben der Art der Kombination hängt die Ergiebigkeit des Kombinationsprozesses weitgehend von der Leistungsfähigkeit und Güte der einzelnen Produktionsfaktoren ab. Für die Güte der Betriebsmittel ist unter anderem ihr technischer Leistungsstand maßgebend,[2] der Einfluß auf die Höhe der Produktionskosten nimmt. Darüber hinaus hängen die Produktionskosten von der Höhe des Ausschußanteils ab, der seinerseits bei Konstanz des technischen Leistungsstandes wesentlich von der gegebenen Technik und der Genauigkeit der Einstellung des betreffenden Betriebsmittels (Maschine) bestimmt wird.

Die Frage nach der Genauigkeit der Einstellung einer Maschine läßt sich jedoch häufig erst während des Produktionsprozesses beantworten. Eine nachträgliche Einstellung ist aber in vielen Fällen mit einer Unterbrechung des Produktionsprozesses verbunden, deren Kosten unter Umständen auch die Kosten eines hohen Ausschußanteils übersteigen. Damit steht die technische

---

1 Vgl. Erich Gutenberg: Die Produktion ..., a.a.O., S. 2f.

2 Die Indikatoren des technischen Leistungsstandes sind:
(a) der Grad der Modernität;
(b) der Abnutzungsgrad;
(c) der Zustand der Betriebsfähigkeit.
Vgl. dazu Erich Gutenberg: Die Produktion ..., a.a.O., S. 70ff.

Betriebsleitung vor dem Problem, bereits vor Anlauf der Produktion zu entscheiden, ob eine Neueinstellung der betreffenden Maschine erforderlich ist. Eine solche Entscheidung erfolgt vielfach unter unsicheren Erwartungen, denn der tatsächliche Einstellungszustand, der einen bestimmten Ausschußanteil produziert, ergibt sich häufig erst nach Produktionsbeginn. Zwar dürfte die Betriebsleitung aufgrund ihrer Erfahrungen in der Lage sein, die möglichen Ausschußanteile einer bestimmten Losgröße[1] (im folgenden: Θ) und die Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens $W_o(\Theta_i)$ a priori zu schätzen, jedoch wird sie wegen der Konsequenzen einer falschen Einsschätzung - Kosten der Neueinstellung einerseits und durch Ausschuß bedingte Kosten anderseits - vor einer endgültigen Entscheidung weitere Informationen über den tatsächlichen Einstellungszustand wünschen.

Diese Informationen können beschafft werden, indem man die Maschine probeweise ein oder mehrere Stücke produzieren läßt und die endgültige Entscheidung erst unter Einbeziehung dieses Stichprobenergebnisses trifft. Jedoch sprechen gerade im Produktionsbereich kostenmäßige Überlegungen für einen möglichst kleinen Stichprobenumfang. So kann z.B. mit der Inspektion eines Produktes hinsichtlich seiner Güte gleichzeitig seine Zerstörung verbunden sein, oder die Produktion eines Probestückes verursacht wegen des gesonderten Anlaufens der Produktionsanlagen unverhältnismäßig hohe Kosten.

Bei Problemen, in denen der Stichprobenumfang möglichst klein gehalten werden soll, haben sich sogenannte sequentielle Stichprobenverfahren bewährt, deren Besonderheit darin besteht,

---

1 Die Losgröße gibt die Zahl der in einer Serie oder Sorte enthaltenen Fertigungseinheiten, die in der gleichen Produktionsweise hintereinander ohne Unterbrechung produziert werden, an.

daß nicht ein bestimmter Stichprobenumfang von vorneherein festgelegt wird und dann in einem Durchgang gezogen wird, sondern nach Beobachtung einer oder mehrerer Untersuchungseinheiten wird darüber entschieden, ob der Prozeß des Beobachtens fortgesetzt oder bereits aufgrund der vorliegenden Informationen eine endgültige Entscheidung getroffen werden soll.[1] Der Vorteil der sequentiellen Vorgehensweise liegt darin, daß man im Durchschnitt mit weniger Beobachtungen eine bestimmte gewünschte Information erzielen kann.[2]

Bei der Aufstellung eines sequentiellen Stichprobenverfahrens auf Bayesscher Grundlage geht man von der Überlegung aus, daß der Informationswert einer Stichprobenbeobachtung als Basis zum Treffen einer Entscheidung im wesentlichen von dem erhaltenen Stichprobenergebnis selbst abhängt. So ist es durchaus möglich, daß bei festen A-priori-Wahrscheinlichkeiten eine Stichprobe gegebenen Umfangs die a priori bestehende Unsicherheit über den Wert der zu schätzenden Zufallsvariablen nicht wesentlich verringert und damit die Ausdehnung des Stichprobenumfangs gerechtfertigt erscheint. Anderseits kann das Ergebnis einer Stichprobe des gleichen Umfangs die A-posteriori-Unsicherheit so weit mindern, daß der Entscheidende bereit ist, ohne weitere Stichproben-

---

1 Die ersten Ansätze sequentieller Stichprobenverfahren stammen von Abraham Wald: Sequential Analysis. New York 1947. 6th. printing 1963. Der von Wald erstmals formulierte sequentielle Quotiententest basiert auf der Überlegung, daß die gleiche stochastische Situation, die man nach der Durchführung einer Stichprobe vorfindet, sich bereits während der Stichprobenerhebung ein- oder mehrmals ergibt, so daß nicht erst nach Ziehung sämtlicher Untersuchungseinheiten, sondern schon beim ersten Auftreten der Situation die volle Stichprobeninformation vorliegt. Vgl. dazu auch Günter Menges: Das Sequentialtestverfahren, insbesondere seine betriebswirtschaftliche Anwendung. In: ZfB, 28. Jg. (1958), S. 75 ff.

2 Bei der mit Hilfe sequentieller Stichprobenverfahren möglichen Verringerung des Stichprobenumfangs handelt es sich keineswegs um eine absolute, sondern um eine durchschnittliche Verringerung. Da bei solchen Stichprobenplänen zwei Kennzahlen festgelegt werden, die durch Vergleich mit dem nach Entnahme einer oder mehrerer Einheiten beobachteten Ergebnis die Annahme oder Ablehnung der aufgestellten Hypothese anzeigen, kann es sein, daß das Ergebnis ständig zwischen beiden Kennzahlen liegt und der Prozeß sich fortsetzt.

informationen eine endgültige Entscheidung zu treffen.[1] Diese Tatsache möge folgendes Beispiel verdeutlichen: Der Entscheidende weiß, daß eine mit Kugeln gefüllte Urne entweder $\Theta_1 = 10\%$ oder $\Theta_2 = 20\%$ rote Kugeln enthält. Seine A-priori-Informationen sind sehr ungenau, so daß er die Wahrscheinlichkeiten für den Anteil roter Kugeln in der Urne auf $W_o(\Theta_1) = 0,6$ und $W_o(\Theta_2) = 0,4$ schätzt. Zur Gewinnung weiterer Informationen entnimmt er deshalb der Urne $n = 10$ Kugeln. Die Stichprobe möge die folgenden Ergebnisse x_j, aus denen sich nach dem Bayesschen Theorem die folgenden A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für den Anteil roter Kugeln in der Urne berechnen lassen,[2] alternativ zeigen:

(1) $x = 0$ rote Kugeln; daraus folgt: $W_1(\Theta_1/x = 0) = 0,83$;
(2) $x = 5$ rote Kugeln; daraus folgt: $W_1(\Theta_1/x = 5) = 0,06$;
(3) $x = 2$ rote Kugeln; daraus folgt: $W_1(\Theta_1/x = 2) = 0,49$.

In den Fällen (1) und (2) dürfte eine A-posteriori-Wahrscheinlichkeit von 83% bzw. 6% genügen, um ohne weitere Informationen eine Entscheidung über den Urneninhalt zu treffen. Im Fall (3) dagegen müßte die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit von 49% den Entscheidenden zur Einholung weiterer Informationen (= Ausdehnung des Stichprobenumfangs) veranlassen; denn drückte sich seine A-priori-Unsicherheit durch nahezu gleiche Wahrscheinlichkeiten für die beiden alternativ möglichen Anteile roter Kugeln aus, wird diese Unsicherheit im Fall (3) durch eine A-posteriori-Wahrscheinlichkeit von $W_1(\Theta_1/x = 2) = 0,49$ und damit $W_1(\Theta_2/x = 2) = 1 - 0,49 = 0,51$ eher noch vergrößert.

Die Formulierung des Problems wäre jedoch unvollständig, wenn die Kosten der Stichprobenerhebung vernachlässigt würden. Unterstellt man, daß die Kosten einer Stichprobe einerseits von ihrem Umfang n abhängen, anderseits die Vorbereitung eines Stichpro-

---

1 Vgl. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 91 ff.

2 Bei der Berechnung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten wurde als Likelihood-Verteilung eine Binomialverteilung unterstellt.

benplans von n unabhängig ist, hängt die ökonomische Rechtfertigung einer sequentiellen Vorgehensweise stark von den in Bezug auf n fixen Stichprobenkosten und der Häufigkeit der Stichprobenerhebung ab.[1] Damit kann bei hohen fixen Informationskosten und der Notwendigkeit zu mehrmaliger Wiederholung des Informationsprozesses der Vorteil sequentieller Stichprobenerhebungen wieder aufgehoben werden.

Im folgenden soll anhand eines Beispiels gezeigt werden, wie ein Entscheidungsproblem bezüglich der Einstellung einer Maschine bei Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre sequentiell gelöst werden kann: Vor der Auflage eines bestimmten Produktionsloses herrscht nach der Inspektion und Säuberung der Produktionsanlagen bei der technischen Betriebsleitung eines Unternehmens Unsicherheit über den Einstellungszustand der wichtigsten maschinellen Anlage. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, daß bei einer Veränderung der Einstellung dieser Maschine sich aus ihren technischen Gegebenheiten bedingt der zu erwartende Ausschußanteil Θ ausschließlich in den folgenden Bereichen bewegt und innerhalb der jeweiligen Intervalle relativ dicht um die Intervallmitte streut:[2]

Θ_1: 0% bis 20% Ausschußanteil; Intervallmitte: 10%;
Θ_2: 40% bis 60% Ausschußanteil; Intervallmitte: 50%;
Θ_3: 80% bis 100% Ausschußanteil; Intervallmitte: 90%.

Außerdem ist man - ebenfalls aufgrund von Erfahrungen - in der Lage, den in Frage kommenden Ausschußanteilen die folgenden subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten zuzuordnen:

---

1 Stichprobenkosten in Form von fixen und variablen Kosten dürften die Verhältnisse der Realität durchaus treffend wiedergeben.

2 Die Annahme von nur drei möglichen Ausschußquoten dürfte nur in Ausnahmefällen die Gegebenheiten der Praxis treffen. Da es sich hier jedoch um ein Beispiel handelt, das zur Verdeutlichung der Bayesschen Vorgehensweise dient, mag diese Prämisse zulässig sein. Die Übertragung der in diesem Abschnitt gefundenen Ergebnisse läßt sich natürlich auch auf andere realistischere Ausschußanteile übertragen, wobei jedoch durch eine Fülle von Daten und Berechnungen die für ein Beispiel erforderliche Übersicht verloren geht.

$W_o(\Theta_1) = 0,4;$
$W_o(\Theta_2) = 0,2;$
$W_o(\Theta_3) = 0,4.$

Den Umweltzuständen in Form ungewisser Ausschußanteile stehen die folgenden Aktionsmöglichkeiten der Betriebsleitung gegenüber:

a_1: Aufnahme der Produktion ohne vorherige Einstellung der Maschine;

a_2: vorherige Einstellung der Maschine und damit Senkung des Ausschußanteils auf ein bekanntes sehr niedriges Niveau;

a_3: Entnahme eines fertigen Produktes nach einem Probelauf der Maschine zur Qualitätskontrolle, wobei sich das Probestück entweder als einwandfrei (e) oder als defekt (d) erweisen kann.

Zur Aktion a_3 ist zu bemerken, daß die Wahl dieser Aktion nie eine endgültige Entscheidung darstellt, sondern der Entscheidende nach der Inspektion eines Probestückes jeweils wieder vor dem Entscheidungsproblem steht, entweder die Maschine ohne (Aktion a_1) oder mit vorheriger Einstellung (Aktion a_2) laufen zu lassen. Dieser Prozeß setzt sich so lange fort, bis aufgrund der vorliegenden Informationen eine Entscheidung allein zwischen den Aktionen a_1 und a_2 ökonomisch gerechtfertigt erscheint. Grundlage der Entscheidung zwischen den Aktionen a_1 und a_2 und der Aktion a_3 auf jeder der i Stufen (i = 0, 1, 2, ..., n) dieses Entscheidungsprozesses sind die A-priori- bzw. A-posteriori-Erwartungswerte der mit den Aktionen verbundenen Kosten oder Verluste $E_i(a_i)$. Entscheidet sich die Betriebsleitung für die Aktion a_1 hängen die damit verbundenen Kosten von dem sich tatsächlich später ergebenden Ausschußanteil ab. Bei Wahl der Aktion a_2 entstehen Einstellungskosten und in geringem Maße Ausschußkosten, weil der Ausschußanteil nach vorgenommener Einstellung der Maschine ein ganz bestimmtes niedriges Niveau annimmt. Diese Kosten betragen zusammen für die geplante Losgröße 500,- DM. Die Kosten der Fertigung eines Probestücks und seiner Inspektion (Aktion a_3) belaufen sich auf 240,- DM. Die folgende Tabelle 5-1 faßt die für

das Entscheidungsproblem unseres Beispiels relevanten Daten zusammen. Neben den in Bezug auf den sich tatsächlich ergebenden Ausschußanteil bedingten Kosten der Aktionen a_1 und a_2: $k(a_i, \Theta_i) = k_i$ zeigt die Tabelle 5-1 durch die Differenzen der bedingten Kosten für die Aktionen a_1 und a_2 die bedingten Verluste $l(a_i, \Theta_i) = l_i$ an, die sich dadurch ergeben, daß die Betriebsleitung jeweils bei tatsächlichem Eintreffen eines bestimmten Ausschußanteils nicht die dazu optimale Aktion gewählt hat. Diese werden zur Ermittlung der Erwartungswerte der Aktionen a_1 und a_2 mit den subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten gewichtet. Würde man z.B. die Aktion a_1 wählen und ergibt sich Θ_1 als Ausschußquote, ist a_1 in diesem Falle die bessere Aktion, weil die mit Θ_1 verbundenen Ausschußkosten unter den Einstellungskosten der Aktion a_2 liegen. Folglich ist in diesem Falle der bedingte Verlust der Aktion a_1 gleich Null und damit auch der Erwartungswert der Aktion a_1. Bei einer Entscheidung für die Aktion a_2 erzielt man dagegen einen Verlust in Höhe von $k_1 - k_2$, der sich jedoch durchschnittlich nur in Höhe der Wahrscheinlichkeit des Eintreffens von Θ_1 multipliziert mit diesem Verlust ergibt.

Tabelle 5-1

Ausschußanteile Θ_i; A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(\Theta_i)$; bedingte Kosten $k(a_i, \Theta_i)$ und Verluste $l(a_i, \Theta_i)$ und Erwartungswerte der Aktionen a_1 (=keine vorherige Einstellung) und a_2 (=Einstellung)

Θ_i	$W_o(\Theta_i)$	$k(a_1, \Theta_i)$	$k(a_2, \Theta_i)$	$l(a_1, \Theta_i)$	$l(a_2, \Theta_i)$	$E_o(a_1)$	$E_o(a_2)$
10%	0,4	250	500	0	250	0	100
50%	0,2	500	500	0	0	0	0
90%	0,4	1200	500	700	0	280	0
$\sum$	1,0	•	•	•	•	280	100

Soll aufgrund alleiniger A-priori-Informationen (Entscheidungsstufe 0) eine endgültige Entscheidung zwischen der Aktion a_1 und

der Aktion a_2 ohne Einbeziehung der Informationsbeschaffungsmöglichkeit der Aktion a_3 getroffen werden, ist nach der Bayesschen Entscheidungsregel die Aktion a_2 = vorherige Einstellung der Maschine zu wählen, weil der Erwartungswert dieser Aktion - ausgedrückt in bedingten Verlusten - der kleinere ist: $E_o(a_2)$ = 100 DM<$E_o(a_1)$ = 280,- DM. Damit wird die Aktion a_1 auf dieser Entscheidungsstufe von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen, so daß die Betriebsleitung nun zu entscheiden hat, ob sie ein Probestück inspizieren (Aktion a_3) soll oder ohne diese Stichprobeninformation bereits auf dieser Entscheidungsstufe eine endgültige Entscheidung für die hier optimale Aktion a_2 treffen soll. Die Entscheidung zwischen den Aktionen a_2 und a_3 erfolgt mit Hilfe des Erwartungswertes der optimalen Aktion mit den Stichprobenkosten (IK = $k(a_3, \Theta_i)$ = 24,- DM). Auf der Entscheidungsstufe 0 beträgt der Erwartungswert der optimalen Aktion a_2: $E_o(a_2)$ = 100,- DM. Da die Differenz zwischen $E_o(a_2)$ und IK = 100 - 24 = 76,- DM positiv ist, sollte die Bestriebsleitung auf der Stufe 0 sich zur Inspektion eines Probestückes (Aktion a_3) entschließen.

Entscheidet sich die Betriebsleitung zur Entnahme eines Probestückes, gelangt sie auf die Entscheidungsstufe 1, wo sie erneut vor dem Problem der Wahl zwischen den Aktionen a_1, a_2 und a_3 steht. Da dieser und die folgenden Schritte zunächst hypothetisch durchgeführt werden, sind sämtliche möglichen Stichprobenergebnisse (x = e (einwandfrei) und x = d (defekt)) und die daraus sich ergebenden Likelihoods $W(x_j/\Theta_i)$ (= Wahrscheinlichkeit für das Auftreten des Stichprobenergebnisses x_j unter der Voraussetzung, daß sich jeweils eine der möglichen Ausschußquoten Θ_i ergibt), zu berücksichtigen. Mit Hilfe des Bayesschen Theorems lassen sich dann aus den A-priori-Wahrscheinlichkeiten und den Likelihoods für jede Entscheidungsstufe die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_i(\Theta_i/x_j)$ (= Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ausschußanteils Θ_i auf der i-ten Entscheidungsstufe unter der Voraussetzung, daß sich eins der möglichen Stichprobenergeb-

nisse x_j ergeben hat) berechnen. Die A-priori-Wahrscheinlichkeiten dienen zur Ermittlung der Erwartungswerte der Aktionen a_1 und a_2, von denen wieder die Aktion mit dem größeren erwarteten bedingten Verlust ausscheidet. Der Erwartungswert der verbleibenden Aktion wird dann mit den Kosten der Aktion a_3 verglichen. Sind die Informationskosten der Aktion a_3 kleiner als der Erwartungswert der übrig gebleibenen Aktion, gelangt man durch die Wahl der Aktion a_3 in die nächst höhere Entscheidungsstufe und setzt diesen Prozeß so lange fort, bis die Informationskosten größer sind als die Erwartungswerte der beiden Aktionen a_1 und a_2.

Zur Ermittlung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Stufe 1 unseres Beispiels sind zunächst die Likelihoods zu berechnen. Dazu soll die Entnahme eines Probestückes als Bernoulli-Experiment[1] aufgefaßt werden, da jede Stichprobe nur zwei mögliche Ergebnisse - entweder ein einwandfreies oder ein defektes Stück - aufweisen kann. Zudem ist die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies oder ein defektes Stück unter der Voraussetzung eines bestimmten Ausschußanteils - $W(x=e/\Theta_i)$ oder $W(x=d/\Theta_i)$ - bei jedem der n möglichen Versuche, die ihrerseits unabhängig voneinander erfolgen, gleich. Somit sind die Likelihoods für das Auftreten eines einwandfreien Probestückes $x = e$ für jeweils eine der möglichen Ausschußquoten Θ_i wie folgt bestimmt:

$$W(x=e/\Theta_1) = 0,9;\ W(x=e/\Theta_2) = 0,5;\ W(x=e/\Theta_3) = 0,1.$$

Für das Stichprobenergebnis $x = d$ ergeben sich die folgenden Likelihoods:

$$W(x=d/\Theta_1) = 0,1;\ W(x=d/\Theta_2) = 0,5;\ W(x=d/\Theta_3) = 0,9.$$

Mit Hilfe des Bayesschen Theorems werden die in der Spalte (5) der folgenden Tabelle 5-2 aufgeführten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten der Stufe 1 berechnet, indem man das Pro-

---

1 Zum Bernoulli-Experiment vgl. Bernard W. Lindgren: Statistical Theory, a.a.O., S. 148 ff.

dukt aus den A-priori-Wahrscheinlichkeiten $W_o(\Theta_i)$ (Spalte (2)) und den Likelihoods $W_1(x_j/\Theta_i)$ (Spalte (3)) bildet (Spalte (4)), und jeweils durch die Summe dieser Produkte dividiert. Die bedingten Verluste l_1 und l_2 der Aktionen a_1 und a_2 (Spalte (6) und (8)) werden mit den A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(\Theta_i/x_j)$ gewichtet und ergeben die Erwartungswerte $E_1(a_i)$ der Aktionen a_1 und a_2 der Entscheidungsstufe 1 (Spalte (7) und (9)).

Tabelle 5-2

A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_1(\Theta_i/x_j)$ der ersten Entscheidungsstufe und Erwartungswerte $E_1(a_i)$ der Aktionen a_1 und a_2 für die möglichen Ergebnisse e und d der ersten Stichprobe

Θ_i	$W_o(\Theta_i)$	$W_1(x_j/\Theta_i)$	$W_o(\Theta_i) \cdot W_1(x_j/\Theta_i)$	$W_1(\Theta_i/x_j)$	l_1	$E_1(a_1)$	l_2	$E_1(a_2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x = e								
0,1	0,4	0,9	0,36	0,72	0	0	250	180
0,5	0,2	0,5	0,10	0,20	0	0	0	0
0,9	0,4	0,1	0,04	0,08	700	56	0	0
$\sum$	1,0	•	0,50	1,00		56		180
x = d								
0,1	0,4	0,1	0,04	0,08	0	0	250	20
0,5	0,2	0,5	0,10	0,20	0	0	0	0
0,9	0,4	0,9	0,36	0,72	700	504	0	0
$\sum$	1,0	•	0,50	1,00		504		20

Aus den Summen der Spalten (7) und (9) der Tabelle 5-2 folgt, daß nach der Inspektion eines ersten Probestückes, wenn es sich als einwandfrei (x = e) erweisen sollte, die Aktion a_1 von den Aktionen a_1 und a_2 als bessere Aktion gewählt werden sollte, weil in diesem Fall der zu erwartende Verlust der Aktion a_1 kleiner ist als der der Aktion a_2: $E_1(a_1) = 56 < E_1(a_2) = 180,-$ DM. Ist dagegen das erste Probestück defekt (x = d), ist die Aktion a_2 von beiden Aktionen die optimale, weil hier der zu erwartende Verlust der Aktion a_1 größer ist als der der Aktion a_2: $E_1(a_1) = 504 > E_1(a_2) = 20,-$ DM.

Vergleicht man jetzt die Kosten der Inspektion eines Probestückes IK = 24,- DM mit den Erwartungswerten der in jeder Position der Entscheidungsstufe 1 optimalen Aktion, ergibt sich, daß in Position d (ein defektes Stück wurde beobachtet) der erwartete Verlust der hier optimalen Aktion a_2 kleiner ist als die Stichprobenkosten: $E_1(a_2) = 20 < IK = 24,-$ DM. Damit scheidet in der Position d nicht nur die Aktion a_1 aus, sondern auch die Aktion a_3 (= Entnahme eines Probestückes). Die Wahl der Aktion a_2 (= vorherige Einstellung) stellt in diesem Fall eine endgültige Entscheidung dar.

Anders ist der Fall in Position e (ein einwandfreies Stück wurde beobachtet). Hier liegt der zu erwartende Verlust der optimalen Aktion a_1 über den Kosten der Entnahme eines Probestückes (Aktion a_3): $E_1(a_1) = 56 > IK = 24,-$ DM. Das bedeutet, daß unter diesen Voraussetzungen die Erhebung einer weiteren Stichprobe ökonomisch sinnvoll ist. Die Wahl der Aktion a_3 führt dann zur Entscheidungsstufe 2. Da die Inspektion eines zweiten Probestückes ebenfalls nur die Ergebnisse x = e oder x = d aufweisen kann, existieren auf der zweiten Entscheidungsstufe nur die Positionen ee (Das erste und das zweite Stück sind einwandfrei.) oder ed (Das erste Stück ist einwandfrei und das zweite defekt.). Die Positionen de und dd können nicht erreicht werden, weil bei Beobachtung eines ersten defekten Probestückes eine endgültige Entscheidung für die Aktion a_2 getroffen wird.

Für unser Beispiel lassen sich die Likelihoods der zweiten Entscheidungsstufe unter der bereits erwähnten Unabhängigkeit der einzelnen Ereignisse nach dem Multiplikationssatz berechnen.[1] Da die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Stichprobenergebnis unter der Voraussetzung eines bestimmten Ausschußanteils bei jedem der n Versuche gleich ist, ergibt sich z.B. die Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies Stück auf der zweiten Entscheidungsstufe bei Vorliegen von $\Theta_1 = 0,1$ als Produkt der Wahrschein-

---

1 Sind zwei Ereignisse A und B stochastisch unabhängig, so ist die Wahrscheinlichkeit für ihr gemeinsames Auftreten gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten. $W(A \cap B) = W(A) \cdot W(B)$.

lichkeiten, das Ergebnis x = e zu erhalten: $W_2(e \cap e/\Theta_1) = W_1(x=e/\Theta_1) \cdot W_2(x=e/\Theta_1) = 0,9 \cdot 0,9 = 0,81$. Analog dazu lassen sich die Likelihoods für alle Stichprobenergebnisse und alle Ausschußquoten der zweiten Entscheidungsstufe berechnen.[1] Diese sind der folgenden Tabelle 5-3 (Spalte (3)) zu entnehmen, die analog zur Tabelle 5-2 die Erwartungswerte der Aktionen a_1 und a_2 auf der zweiten Entscheidungsstufe zeigt.

Tabelle 5-3

A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten $W_2(\Theta_i/x_j)$ der zweiten Entscheidungsstufe und Erwartungswerte $E_2(a_i)$ der Aktionen a_1 und a_2 für die möglichen Ergebnisse ee und ed der zweiten Stichprobe

Θ_i	$W_o(\Theta_i)$	$W_2(x_j/\Theta_i)$	$W_o(\Theta_i) \cdot W_2(x_j/\Theta_i)$	$W_2(\Theta_i/x_j)$	l_1	$E_2(a_1)$	l_2	$E_2(a_2)$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
x = e∩e								
0,1	0,4	0,81	0,324	0,783	0	0	250	196
0,5	0,2	0,25	0,059	0,121	0	0	0	0
0,9	0,4	0,01	0,036	0,096	0	67	0	0
Σ	1,0	•	0,414	•	•	67	•	196
x = e∩d								
0,1	0,4	0,09	0,036	0,295	0	0	250	74
0,5	0,2	0,25	0,050	0,410	0	0	0	0
0,9	0,4	0,09	0,030	0,295	700	207	0	0
Σ	1,0	•	0,122	1,000	•	207	•	74

Die Auswertung der Tabelle 5-3 ergibt, daß nach Beobachtung eines zweiten einwandfreien Probestückes (Position ee) die Aktion a_1 gegenüber der Aktion a_2 die bessere ist, weil der A-posteriori-Erwartungswert der Aktion a_1 (erste Summe der Spalte (7)) kleiner ist als der der Aktion a_2 (erste Summe der Spalte (9)): $E_2(a_1) = 67 < E_2(a_2) = 196,-$ DM. Erweist sich dagegen das zweite Probestück als defekt (Position ed), ist die Aktion a_2 vorteilhafter, denn

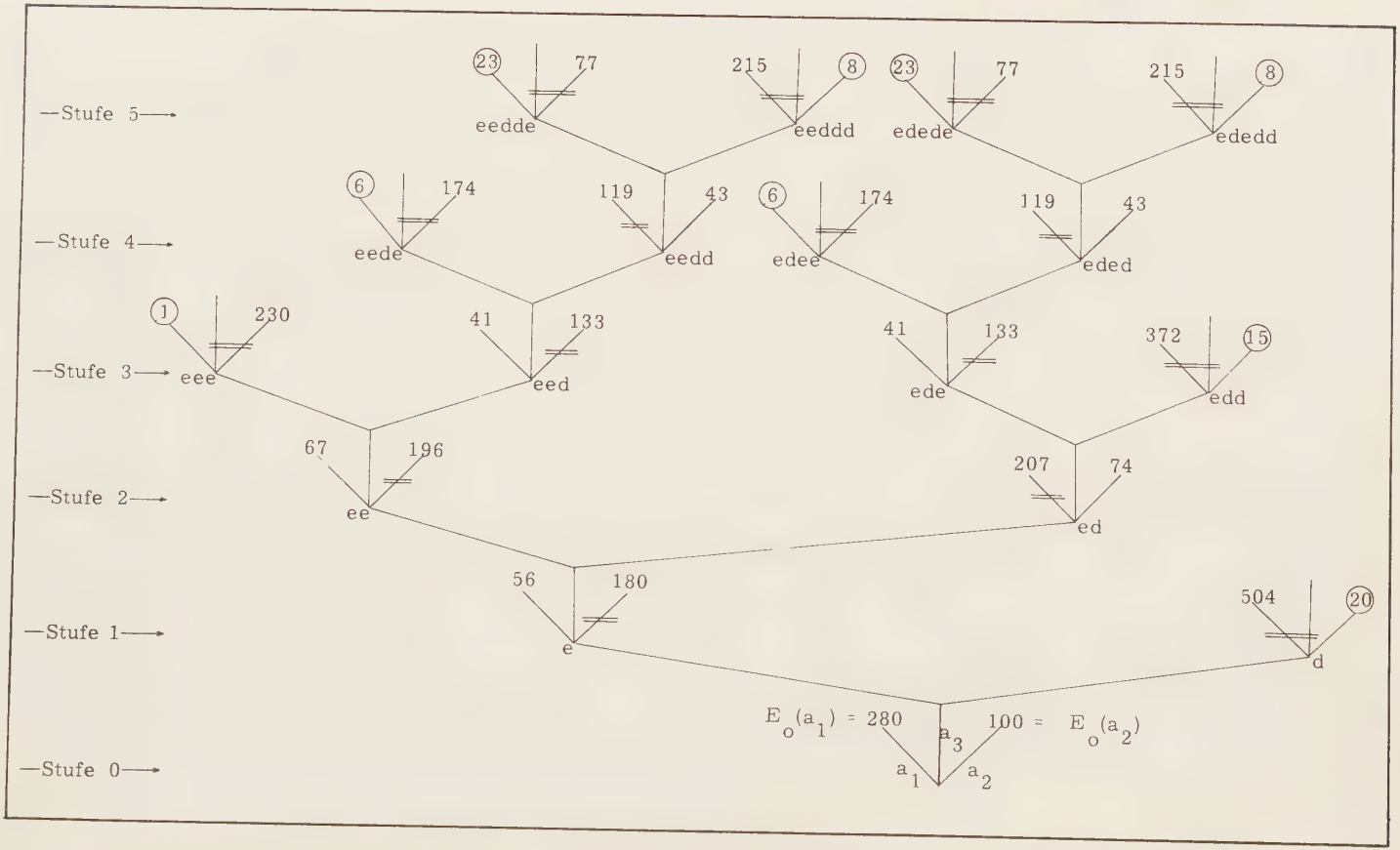
1 Diese Wahrscheinlichkeiten lassen sich auch mit Hilfe der einem Bernoulli-Prozeß zugrunde liegenden Verteilung, der Binomialverteilung, berechnen.

in diesem Fall ist ihr Erwartungswert (zweite Summe der Spalte (9)) kleiner als der der Aktion a_1 (zweite Summe der Spalte (7)): $E_2(a_2) = 74$ $E_2(a_1) = 207,-$ DM. In beiden Positionen ist der erwartete Verlust der jeweils optimalen Aktion größer als die Kosten der Aktion a_3: $E_2(a_1) = 67 > IK = 24,-$ DM und $E_2(a_2) = 74 > IK = 24,-$ DM. Das heißt, auf der zweiten Entscheidungsstufe sollte die Betriebsleitung sich in allen Positionen für die Aktion a_3 (= Entnahme einer Untersuchungseinheit) entscheiden, so daß die dritte Entscheidungsstufe mit den möglichen Positionen eee, eed, ede und edd erreicht wird. Hier wiederholt sich der Prozeß der Berechnung der A-posteriori-Erwartungswerte und des Vergleichs der in den einzelnen Positionen verbleibenden optimalen Aktion mit den Informationskosten der Aktion a_3. Aus Gründen der Übersicht ist auf eine gesonderte tabellarische Darstellung der Werte der dritten und der folgenden Entscheidungsstufen verzichtet worden.

Stattdessen gibt die folgende Abbildung 5-1 den sequentiellen Entscheidungsprozeß des Beispiels der Maschineneinstellung in Form eines Baumdiagramms wieder. Ausgehend von der Stufe 0 wählt die Betriebsleitung auf jeder Stufe dieser Entscheidungssequenz zwischen den Aktionen a_1 (jeweils der linke Ast), a_2 (jeweils der rechte Ast) und a_3 (jeweils der mittlere Ast), wobei die Aktionen a_1 (= Anlauf der Produktion o h n e vorherige Einstellung) und a_2 (= Anlauf der Produktion m i t vorheriger Einstellung) jeweils in einen erwarteten Verlust $E_i(a_i)$ (Zahlen am Ende der Äste) münden. Aktion a_3 (= Entnahme eines Probestückes) mündet jeweils in ein Stichprobenergebnis e oder d bzw. eine Position (Buchstabenkombinationen neben den Knoten). In allen Positionen auf jeder Stufe scheidet von den Aktionen a_1 und a_2 die Aktion mit dem höheren Erwartungswert aus, was durch einen Doppelstrich durch den Ast dieser Aktion gekennzeichnet ist. Ergibt sich, daß in einer Position die Kosten der Aktion a_3 größer sind als der Erwartungswert der hier optimalen Aktion, wird eine endgültige Entscheidung für diese Aktion getroffen. In diesen Fällen ist der Erwartungswert dieser Aktion mit einem Kreis versehen. Die Entscheidungssequenz endet schließlich auf der fünften Stufe, weil das dorthin führende Stichprobenergebnis in beiden Fällen zu einem erwarteten Verlust der op-

Abbildung 5-1

Darstellung der Entscheidungssequenz des Beispiels der Maschineneinstellung als Baumdiagramm



timalen Aktion führt, der kleiner als die Kosten der Entnahme einer weiteren Untersuchungseinheit ist: $E_5(a_1) = 23 < IK = 24,-$ DM und $E_5(a_2) = 8 < IK = 24,-$ DM. Das gilt für die Positionen eedde und eeddd als auch für edede und ededd, weil es für die Werte der Likelihoods gleichgültig ist, in welcher Reihenfolge die Stichprobenergebnisse anfallen, so daß nur entscheidend ist, daß einmal drei einwandfreie und zwei defekte und andermal zwei einwandfreie und drei defekte Probestücke beobachtet wurden.

Mit der Abbildung 5-1 ist zunächst das anstehende Entscheidungsproblem in der Weise systematisch dargestellt worden, daß die erwarteten Verluste der beiden Aktionen a_1 und a_2 bei allen möglichen Stichprobenergebnissen einander gegenübergestellt wurden. Dabei wurde die Aktion mit dem höheren erwarteten Verlust von der weiteren Betrachtung ausgeschlossen. Ebenfalls wurde im Vergleich zwischen der dann verbleibenden optimalen Aktion mit der Aktion a_3 die Aktion a_3 dann nicht weiter verfolgt, wenn der erwartete Verlust der optimalen Aktion geringer war als die Stichprobenkosten der Aktion a_3. Jedoch ist damit noch nicht geklärt, ob die Aktion a_3 (=Inspektion eines Probestückes) oder die übrig gebliebene optimale Aktion die bessere ist. Dazu bedarf es auf jeder Stufe der Entscheidungssequenz der Berechnung des erwarteten Verlustes der mit der Aktion a_3 verbundenen Konsequenzen $E_i(a_3)$. Zur Durchführung dieser Berechnungen empfiehlt sich die Anwendung der sogenannten "Roll-back-Analyse".[1]

Bei der Lösung eines sequentiellen Entscheidungsproblems unter Anwendung der Roll-back-Analyse geht man von den erwarteten Verlusten der mit endgültigen Entscheidungen verbundenen optimalen Aktionen der obersten Stufe des Baumdiagramms aus und bestimmt so sukzessiv die besten Aktionen der tiefer liegenden Stufen.

---

1 Vgl. dazu Hans Bühlmann et al.: Entscheidung bei Unsicherheit ..., a.a.O., S. 58 ff. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 101 ff. Robert Schlaifer: Probability and Statistics..., a.a.O., S. 596 ff.

In unserem Beispiel gelangt man von der Stufe 4 nur über die Positionen eedd und eded zur fünften und letzten Stufe. Befindet man sich in der Position eedd oder eded führt in beiden Fällen die Inspektion eines Probestückes entweder zu einer endgültigen Entscheidung für die Aktion a_1 mit $E_5(a_1) = 23,-$ DM oder zu einer endgültigen Entscheidung für die Aktion a_2 mit $E_5(a_2) = 8,-$ DM. Zu welcher dieser beiden Entscheidungen man gelangt, hängt von dem Ergebnis der Stichprobe in den Positionen eedd bzw. eded ab. Damit läßt sich der erwartete Verlust der Stichprobe auf der Stufe 4 in jeder Position durch die Summe aus den erwarteten Verlusten der beiden optimalen Aktionen gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit ihres Eintreffens ausdrücken.

Die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens der erwarteten bedingten Verlusteder jeweils optimalen Aktion auf der Stufe 5 kann durch die Frage nach der Wahrscheinlichkeit für ein einwandfreies oder ein defektes Stück in der Stichprobe bestimmt werden, nachdem man bereits zwei einwandfreie und zwei defekte Probestücke erhalten hat. Bisher ging man bei der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Stichprobenergebnis von den bedingten Wahrscheinlichkeiten unter der Voraussetzung bekannter Ausschußanteile aus, um damit über das Bayessche Theorem die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für jeweils diese Ausschußquoten zu berechnen. Fragt man aber nach der unbedingten Eintrittswahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Stichprobenergebnis ($x = e$ oder $x = d$), ist der auf jeder Entscheidungsstufe erwartete tatsächliche Ausschußanteil $E_i(\Theta)$ ausschlaggebend. Dieser bestimmt sich in jeder Position als Summe aus den möglichen Ausschußanteilen gewichtet mit ihren A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten,[1] so daß die bis dahin in Form von Stichprobenergebnissen vorliegenden Zusatzinformationen mit berücksichtigt werden.[2]

---

1 Auf der Stufe 0 müssen natürlich die A-priori-Wahrscheinlichkeiten genommen werden.

2 Vgl. Robert Schlaifer: Probability and Statistics..., a.a.O., S. 198 - 208.

Die Berechnung des erwarteten Ausschußanteils $E_4(\Theta)$ auf der Stufe 4 ist aus der folgenden Tabelle zu entnehmen.

Tabelle 5-4

Berechnung des auf der vierten Entscheidungsstufe zu erwartenden Ausschußanteils $E_4(\Theta)$ bei vorheriger Beobachtung von zwei einwandfreien und zwei defekten Probestücken[1]

Θ_i	$W_o(\Theta_i)$	$W_4(eedd/\Theta_i)$	$W_o(\Theta_i)\cdot W_4(eedd/\Theta_i)$	$W_4(\Theta_i/eedd)$	$\Theta_i \cdot W_4(\Theta_i/eedd)$
0,1	0,4	0,0081	0,00324	0,171	0,0171
0,5	0,2	0,0625	0,01250	0,658	0,3290
0,9	0,4	0,0081	0,00324	0,171	0,1539
Σ	1,0	•	0,01898	1,000	$E_4(\Theta)$=0,5000

Der als Summe der letzten Spalte der Tabelle 5-4 ausgewiesene Erwartungswert $E_4(\Theta)$ gibt an, auf der Stufe 4 mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,5 ein defektes bzw. mit 1 - 0,5 = 0,5 ein einwandfreies Probestück zu finden. Der erwartete Verlust der Erhebung einer weiteren Stichprobe (= Aktion a_3) auf der Stufe 4 läßt sich damit folgendermaßen berechnen:[2]

(5-1) $E_4(a_3) = E_5(a_1)\cdot(1 - E_4(\Theta)) + E_5(a_2)\cdot E_4(\Theta)$;

$E_4(a_3) = 23\cdot 0,5 + 8\cdot 0,5 = 15,50$ DM .

Addiert man zu dem Erwartungswert der Aktion a_3 auf der vierten Stufe noch die Stichprobenkosten in Höhe von IK = 24,- DM, erhält man den insgesamt zu erwartenden Verlust $E_4^{ges}(a_3)$ als Konsequenz der Entscheidung, auf der vierten Stufe ein weiteres Probestück zu inspizieren.

(5-2) $E_4^{ges}(a_3) = E_4(a_3) + IK = 15,50 + 24 = 39,50$ DM .

Jetzt erst läßt sich eine Entscheidung darüber treffen, welche Aktion in den einzelnen Positionen der Stufe 4 die tatsächlich

---

1 Wie bereits erwähnt, ist es gleichgültig in welchen Kombinationen ee und dd vorkommen.

2 Diese Betrachtungsweise geht von langfristigen relativen Häufigkeiten aus: bei häufiger Wiederholung der gleichen Situation wird die Aktion a_3 im Durchschnitt zu 15,50 DM Verlust führen.

die beste ist, indem man den gesamten erwarteten Verlust der Aktion a_3 mit den erwarteten Verlusten der in diesen Positionen im Hinblick auf a_1 und a_2 besseren Aktionen vergleicht. Ist der totale erwartete Verlust der Aktion a_3 kleiner als der Erwartungswert der bis dahin optimalen Aktion (in unserem Beispiel: $E_4(a_2) = 43 > E_4^{ges}(a_3)$), wird diese Aktion als schlechter verworfen und in dem betreffenden Baumdiagramm mit einem Doppelstrich versehen. Das gleiche gilt vice versa analog. Diese Vorgehensweise wird auf der nächst tieferen Stufe wiederholt, indem man zunächst den Erwartungswert des Ausschußanteils $E_i(\Theta)$ analog zur Tabelle 5-4 berechnet.[1] Dabei sind lediglich die als Gewichte fungierenden A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten andere als in der Tabelle 5-4, weil der Entscheidende auf der Stufe 3 sich nur auf die Informationen der Stichprobenergebnisse der darunterliegenden Stufen eed und ede stützen kann. Die sich durch den Erwartungswert des Ausschußanteils auf der Stufe drei ergebenden Wahrscheinlichkeiten für die Beobachtung eines defekten bzw. einwandfreien Probestückes dienen der Berechnung des erwarteten totalen Verlustes der Aktion a_3 auf dieser Stufe $E_3^{ges}(a_3)$, wobei Grundlage die Erwartungswerte der bis dahin verbliebenen optimalen Aktionen - entweder Aktion a_1 oder a_2 - sind.

Auf diese Weise durchläuft man alle Stufen der Entscheidungssequenz von oben, bis die Stufe 0 erreicht ist. Der hier errechnete gesamte erwartete Verlust der Aktion a_3 gibt gleichzeitig den gesamten erwarteten Verlust der Entscheidung an, der optimalen Entscheidungssequenz zu folgen, wie sie sich durch die Roll-back-Analyse ex ante ergibt, o h n e bereits irgendeine Entscheidung getroffen zu haben.

Die folgende Abbildung 5-2 zeigt anhand eines Baumdiagramms die Vorgehensweise für das Beispiel der Maschineneinstellung.

---

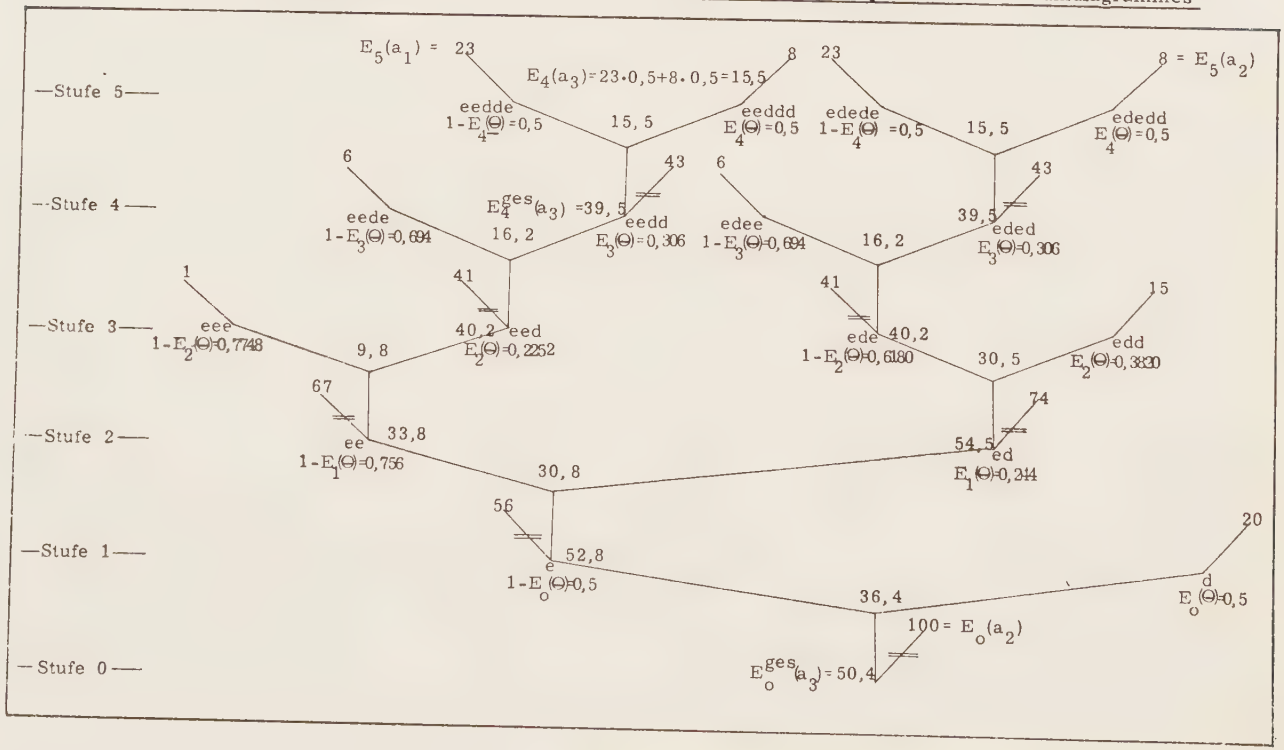
1 Auf die Darstellung der Berechnungen aller $E_i(a_3)$ sei hier aus Gründen der Übersichtlichkeit verzichtet. Die Werte sind stattdessen der folgenden Abbildung 5-2 zu entnehmen.

Dabei sind die Äste, die von vorneherein zu nicht optimalen Aktionen führen, zur besseren Übersicht weggelassen worden, so daß die Zahlen am Ende der Äste die erwarteten bedingten Verluste der vor Durchführung der Roll-back-Analyse optimalen Aktionen repräsentieren. Die Werte jeweils an den Entscheidungsknoten geben die totalen erwarteten Verluste der Stichprobenerhebung $E_i^{ges}(a_3)$ an, wogegen die erwarteten Verluste der Durchführung einer Stichprobe ohne Stichprobenkosten $E_i(a_3)$ jeweils im Scheitelpunkt der beiden alternativ möglichen Ergebnisse der Aktion a_3 zu finden sind. Analog zur Abbildung 5-1 geben die Buchstabenkombinationen aus den Buchstaben e bzw. d die Positionen an, in die der Entscheidende bei Wahl der Aktion a_3 jeweils gelangen kann. Die Wahrscheinlichkeiten $E_i(\Theta)$ bzw. $1 - E_i(\Theta)$ unterhalb der Buchstabenkombinationen geben die unbedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines defekten bzw. einwandfreien Probestückes auf der i-ten Stufe an, nachdem man bereits die Beobachtungen der darunterliegenden Stufen gemacht hat.

Ausgehend von der Entscheidungsstufe 5 der Abbildung 5-2 sieht man am Fehlen der Äste für die Aktion a_3, daß hier in allen Positionen die bis dahin optimale Aktion besser ist als die Erhebung einer weiteren Stichprobe. Damit ist auf der Stufe 4 in den Positionen eedd und eded die Entscheidung anhand des Vergleichs der erwarteten Verluste zu treffen, ob die verbliebene Aktion a_2 oder die Aktion a_3 günstiger ist. Die Positionen eede und edee können vernachlässigt werden, weil hier jeweils der Erwartungswert der optimalen Aktion kleiner ist als die Stichprobenkosten. Da in der Position eedd bzw. eded der Erwartungswert der optimalen Aktion a_2 größer ist als der totale Erwartungswert der Aktion a_3: $E_4(a_2) = 43 > E_4^{ges}(a_3) = 39,50$ DM, sollte hier die Aktion a_3 der Aktion a_2 vorgezogen werden, was durch einen Querstrich durch den Ast der Aktion a_2 ausgedrückt wird. Ausgangspunkt zur Berechnung des Erwartungswertes der Stichprobeninformation der Stufe 3 $(E_3(a_3))$ ist damit der totale Erwartungswert der Stichprobeninformation der

Abbildung 5-2

Roll-back-Analyse des Entscheidungsproblems der Maschineneinstellung anhand eines Baumdiagrammes



Stufe 4 ($E_4^{ges}(a_3)$ = 39, 50 DM) und der Erwartungswert der Aktion a_1 der vierten Stufe ($E_4(a_1)$ = 6, - DM, die mit $E_3(\Theta)$ = 0, 306 bzw. 1 - $E_3(\Theta)$ = 0, 694 zu gewichten sind. Damit ergibt sich der totale Erwartungswert der Stichprobe auf der Stufe 3 wie folgt:

(5-2a) $E_3^{ges}(a_3) = E_4^{ges}(a_3) \cdot E_3(\Theta) + E_4(a_1) \cdot (1 - E_3(\Theta)) + IK$;

$= 39,50 \cdot 0,306 + 6 \cdot 0,694 + 24 = 40,20$ DM .

Auf der Stufe 3 wird dann in den Positionen eed und ede die Aktion a_3 als optimale Aktion gewählt, weil sie jeweils den niedrigeren zu erwartenden Verlust aufweist: $E_3^{ges}(a_3)$ = 40, 2< $E_3(a_1)$ = 41, - DM. Ebenso erweist sich auf den Stufen 2 und 1 die Aktion a_3 als die bessere. Auf der Stufe 0 schließlich ergibt sich für die Aktion a_3 ein totaler erwarteter Verlust von $E_o^{ges}(a_3)$ = 50, 40 DM, der ca. um die Hälfte kleiner ist als der erwartete Verlust der bis dahin optimalen Aktion a_2 mit $E_o(a_2)$= 100, - DM. Das bedeutet für das Entscheidungsproblem unseres Beispiels, daß im Durchschnitt eine Entscheidung allein aufgrund der A-priori-Information zu einem Verlust von 100 DM führt, wogegen ein Vorgehen gemäß der durch die Roll-back-Analyse ausgearbeiteten Entscheidungssequenz einen Verlust von nur 50, 40 DM zur Folge hat.

Daher sollte als optimale Strategie zunächst auf der Stufe 0 ein Probestück (= Aktion a_3) entnommen werden. Ist das Probestück defekt (Position d; Stufe 1), sollte die Betriebsleitung sich für die Aktion a_2 (= vorherige Einstellung der Maschine) entscheiden. Erweist sich dagegen das erste Probestück als einwandfrei (= Position e; Stufe 1), sollte ein zweites und drittes Stück inspiziert werden. Sind diese weiteren Stücke entweder beide einwandfrei oder beide defekt (= Positionen eee bzw. edd), sollte eine endgültige Entscheidung je nach den vorliegenden Stichprobenergebnissen entweder für Aktion a_1 mit $E_3(a_1)$ = 1 oder für Aktion a_2 mit $E_3(a_2)$ = 15, - DM erfolgen.

Lediglich bei Stichprobenergebnissen, die zu den Positionen eed und ede führen, ist es sinnvoll, ein weiteres Probestück zu entnehmen. Ist dieses einwandfrei (= Positionen eede oder edee; Stufe 4), endet hier der Entscheidungsprozeß mit einer endgültigen Entscheidung für die Aktion a_1 mit $E_4(a_1) = 6$. Andernfalls führt die Entnahme eines fünften Probestückes zu den Positionen eedde, eeddd, edede undededd, in denen in allen Fällen eine endgültige Entscheidung zu treffen ist.

Der in Stufe 0 ausgewiesene zu erwartende totale Verlust der Aktion a_3, der gleichzeitig der insgesamt zu erwartende Verlust der sequentiellen Vorgehensweise ist, läßt sich in die durchschnittlich zu erwartenden Stichprobenkosten E(IK) und in den Verlust, der sich im Durchschnitt durch das Treffen einer endgültigen Entscheidung ergibt, zerlegen. Zur Berechnung der zu erwartenden Informationskosten geht man von der Überlegung aus, daß,nachdem das erste Probestück mit Sicherheit entnommen wurde, die Wahrscheinlichkeit für die Entnahme weiterer Untersuchungseinheiten immer kleiner wird.[1] Dabei wird die Wahrscheinlichkeit für die Entnahme eines weiteren Probestückes jeweils durch die Wahrscheinlichkeit bestimmt, mit der man mit dieser Stichprobe eine oder mehrere Positionen erreicht, in denen man keine endgültige Entscheidung treffen sollte. Diese Wahrscheinlichkeit wird ihrerseits von dem entsprechenden Erwartungswert des Ausschußanteils $E_i(\Theta)$ bzw. $1 - E(\Theta)$ angegeben. So ist nach der Entnahme des ersten Probestückes die Wahrscheinlichkeit für die Entnahme eines zweiten Stückes gleich der Wahrscheinlichkeit in die Position ee oder ed zu gelangen. Dahin kommt man mit einer Wahrscheinlichkeit von: $1 - E_o(\Theta) \cap 1 - E_1(\Theta) \cup 1 - E_o(\Theta) \cap E_1(\Theta) = 0,5 \cdot 0,756 + 0,5 \cdot 0,244 = 0,5$. Diese Überlegungen gelten für die restlichen Untersuchungseinheiten analog, deren Wahrscheinlichkeiten der folgenden Tabelle 5-5 zu entnehmen sind.

---

1 Vgl. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 104 ff.

Zur Berechnung des Erwartungswertes der Informationskosten gewichtet man die Kosten pro Untersuchungseinheit mit diesen Wahrscheinlichkeiten und summiert sie.

Tabelle 5-5

Berechnung der erwarteten Stichprobenkosten E(IK)

Zahl der Untersuchungseinheiten (n)	Wahrscheinlichkeit für die Entnahme von n Einheiten	IK	W . IK
1	1,0000	24	24,00
2	0,5000	24	12,00
3	0,1149	24	2,76
4	0,0352	24	0,85
5	0,0176	24	0,42
$\sum$	•	•	40,03 = E(IK)

Die Tabelle 5-5 zeigt als Summe der letzten Spalte die zu erwartenden Stichprobenkosten von E(IK) = 40,03 DM. Den erwarteten Verlust des Treffens einer endgültigen Entscheidung erhält man dann, wenn man von dem erwarteten totalen Verlust der optimalen sequentiellen Vorgehensweise die erwarteten Stichprobenkosten subtrahiert:

(5-3) E(endgültige Entscheidung) = $E_o^{ges}(a_3)$ - E(IK) ;

= 50,40 - 40,03 = 10,37 DM .

Der erwartete Stichprobenumfang läßt sich als Quotient aus den erwarteten Stichprobenkosten und den Kosten der Entnahme einer Untersuchungseinheit wie folgt berechnen:

(5-4) $E(n) = \frac{E(IK)}{IK} = \frac{40}{24} = 1,67$.

Aus (5-3) und (5-4) folgt für unser Beispiel, daß das betreffende Unternehmen bei häufiger Wiederholung des gleichen Entscheidungsproblems und bei Beachtung der optimalen sequentiellen Vorgehensweise durchschnittlich 1,67 Probestücke entnehmen wird, die Kosten in Höhe von 40,03 DM verursachen. Dabei entsteht durch Einhaltung der Sequenz ein Verlust von 10,37 DM.

Mit der sequentiellen Lösung des Entscheidungsproblems unseres Beispiels erhebt sich die Frage nach der Vorteilhaftigkeit des sequentiellen Vorgehens gegenüber einfachen Stichprobenverfahren.[1] Zur Beantwortung dieser Frage soll von der bereits erörterten Abbildung 5-2 ausgegangen werden. Angenommen man hätte sich von vornherein auf einen Stichprobenumfang von einem Probestück (n=1) festgelegt, ergäben sich keine Probleme, vorausgesetzt die Stichprobe ergibt ein defektes Stück. Ist aber das Stück einwandfrei, würde man durch die Wahl der Aktion a_1 mit $E_1(a_1) = 56,-$ DM gegenüber der Aktion a_3 mit $E_1^{ges}(a_3) = 52,80$ DM dadurch verlieren, daß man jetzt keine zweite Stichprobe zieht. Setzt man dagegen den Stichprobenumfang zu Beginn mit zwei Probestücken (n=2) fest, erweist sich das zweite Stück als völlig überflüssig, falls das erste defekt war.

Als Entscheidungskriterium zur Klärung der Frage, ob die sequentielle Vorgehensweise einfachen Stichprobenplänen vorzuziehen ist, dient der Vergleich der durchschnittlichen Erwartungswerte der bei fest vorgegebenem Stichprobenumfang optimalen Aktion mit dem Erwartungswert der sequentiellen Vorgehensweise. Für unser Beispiel brauchen nur Stichprobenumfänge von $n = 1$ und $n = 2$ zum Vergleich herangezogen werden, weil schon allein die Kosten größerer Stichprobenumfänge den gesamten erwarteten Verlust der optimalen sequentiellen Vorgehensweise übersteigen. Für $n = 1$ ergibt sich der Erwartungswert als Summe der erwarteten Verluste der optimalen Aktionen in den Positionen e und d gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit, jeweils in diese Positionen zu gelangen.

(5-5) $$E(a_3)_{n=1} = E_1(a_1) \cdot (1 - E_o(\Theta)) + E_1(a_2) \cdot E_o(\Theta) ;$$

$$= 56 \cdot 0,5 + 20 \cdot 0,5 = 38,00 \text{ DM} .$$

Der gesamte erwartete Verlust eines Stichprobeplans mit $n = 1$ ist dann:

---

1 Zur Rechtfertigung sequentieller Stichproben vgl. Robert Schlaifer: Probability and Statistics ..., a.a.O., S. 601 f.

(5-6) $E_o^{ges}(a_3)_{n=1} = E_o(\bar{a}_3^{167})_{n=1} + IK = 38 + 24 = 52,- \text{ DM}.$

Da der totale Verlust der sequentiellen Vorgehensweise mit $E_o^{ges}(a_3) = 50,40$ DM um 1,60 DM kleiner ist als der erwartete Verlust eines Stichprobenplans mit n = 1, ist hier die sequentielle Vorgehensweise überlegen. Analog ergibt sich für einen Stichprobenplan n = 2:

(5-6a) $E_o^{ges}(a_3)_{n=2} = 67 \cdot 0,756 + 74 \cdot 0,244 + 2 \cdot 24 = 116,70 \text{ DM}.$

Auch für einen Stichprobenplan mit n = 2 ist der gesamte erwartete Verlust höher als der eines sequentiellen Stichprobenplans, so daß zumindest unter den Modellvoraussetzungen unseres Beispiels die sequentielle Lösung des Problems der Maschineneinstellung zu empfehlen ist. Die generelle Gültigkeit dieser Aussage hängt von dem Vorhandensein fixer Stichprobenkosten und deren Höhe ab.[1]

Wenn auch unser Beispiel recht einfach und zum Teil unrealistisch gehalten war, läßt es doch den Schluß zu, daß durch die Anwendung sequentieller Entscheidungsverfahren auf Bayesscher Grundlage eine sinnvolle Lösung des Problems der Maschineneinstellung und anderer artverwandter Probleme im Produktionsbereich gegeben ist. Mögliche Schwierigkeiten bei der praktischen Anwendung dieses Verfahrens liegen einerseits darin, daß sich unter Umständen eine nicht endende Entscheidungssequenz ergibt; das heißt, auf keiner Stufe ist der erwartete Verlust der optimalen Aktion kleiner als die Stichprobenkosten. Anderseits kann das anstehende Problem zu der Konstruktion eines Entscheidungsbaumes führen, der sowohl von der Breite als auch von der Höhe her kaum noch zu überblicken ist und daher bei der Roll-back-Analyse einen erheblichen Rechenaufwand erfordert.[2] Zum Teil lassen sich diese Probleme durch den Einsatz elektronischer Rechenanlagen lösen. Zum andern gilt für nicht endende Sequenzen, daß die Wahrscheinlichkeiten für eine beliebige Stichprobensequenz mit zunehmender Anzahl der Stufen abnehmen, so daß es zulässig ist, die Sequenz dann schon abzubrechen, wenn nur noch in wenigen Positionen eine Entscheidung über weitere Informationsbeschaffung zu treffen ist.[3]

---

1 Vgl. die Ausführungen zu Beginn dieses Abschnitts auf S. 146.

2 Bei der Ausarbeitung eines zur knappen Darstellung geeigneten Beispiels haben wir diese Probleme kennengelernt.

3 Zu dieser Möglichkeit vgl. Robert Schlaifer: Probability and Statistics ..., a.a.O., S. 600 f.

5-2 Weitere Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre bei Entscheidungen im Produktionsbereich

Nachdem im vergangenen Abschnitt mit der sequentiellen Lösung des Problems der Maschineneinstellung nur eine der möglichen Entscheidungssituationen des Produktionsbereiches diskutiert wurde, sollen im folgenden Abschnitt anhand von Beispielen zwei weitere Entscheidungsprobleme dieses Unternehmensbereiches mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre gelöst werden. Dabei geht es in dem ersten Beispiel um die Frage, ob unter gewissen Umständen eine nochmalige Überprüfung bereits als Ausschuß erfaßter Produkte ökonomisch sinnvoll ist. Hier zeigt sich, daß unter den gegebenen Modellvoraussetzungen die alleinige Anwendung des Bayesschen Theorems mit ausschließlich "objektiven" Wahrscheinlichkeiten eine brauchbare Grundlage zum Treffen von Entscheidungen bietet. In dem zweiten Beispiel wird das Problem der Wahl zwischen zwei Zulieferanten untersucht. Dabei ergibt sich, daß die Aufstellung einer A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilung bei alleiniger Schätzung des Erwartungswertes und der Standardabweichung als Streuungsmaß ohne Kenntnis des zugrunde liegenden Verteilungsgesetzes vorgenommen werden kann.

Für das erste Beispiel sei unterstellt, daß ein Unternehmen der Feinmechanikbranche besonders teuere Spezialschrauben herstellt, die nur geringe Toleranzen aufweisen dürfen. Aus technischen Gründen läßt sich ein Ausschußanteil von 1% nicht vermeiden. Bei dem Abnehmer dieser Schrauben verursacht jedoch eine Sendung mit nur 1% defekter Schrauben einen beträchtlichen produktionstechnischen Schaden, den der Lieferant vertraglich ersetzen muß. Um diese Verpflichtungen möglichst klein zu halten, hat das Unternehmen eine Sortiermaschine gekauft, die von den defekten Schrauben 99,8% aussortiert und von den einwandfreien 95% weitergibt. Nach der Produktion eines sehr großen Loses sind N = 10.000 Schrauben als Ausschuß erfaßt worden. Da jede einwand-

freie Schraube einen Stückerlös von 1,- DM bringt, stellt sich hier die Frage, ob eine nochmalige Überprüfung des Ausschusses, die Kosten in Höhe von 1.500,- DM verursacht, lohnenswert ist oder ob man die Schrauben als Schrott für 1.000,- DM verkaufen soll? Die möglichen Aktionen sind damit:

a_1: nochmalige Durchsicht des Ausschusses;
a_2: Verkauf des Ausschusses als Schrott.

Da offensichtlich die Vorteilhaftigkeit der beiden Aktionen von der Höhe des Anteils der einwandfreien Schrauben Φ unter den als Ausschuß erfaßten Stücken abhängt, lassen sich aus den obigen Angaben die folgenden Erlösfunktionen aufstellen:

$e(a_1, \Phi) = e_1 = -1.500 + 10.000 \cdot \Phi$;
$e(a_2, \Phi) = e_2 = 1.000$.

Da es sich bei der Frage nach der Wahrscheinlichkeit für die Höhe des Anteils Φ um die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer einwandfreien Schraube (Ereignis: e) unter der Voraussetzung, sie wurde als defekt erfaßt (Ereignis: k), handelt, kann das Bayessche Theorem zur Lösung dieser Frage herangezogen werden. Die zur Berechnung notwendigen Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeiten sind technisch folgendermaßen vorgegeben:

Ereignisse:

d = Schraube ist defekt;
e = Schraube ist einwandfrei;
k = von der Maschine als Ausschuß erfaßt;
$\bar{k}$ = von der Maschine weitergegeben.

Wahrscheinlichkeiten:

$W(d) = 0,010$;	$W(e) = 0,99$;
$W(k/d) = 0,998$;	$W(k/e) = 0,95$;
$W(\bar{k}/d) = 0,002$;	$W(\bar{k}/e) = 0,05$.

Diese Werte lassen sich jetzt in das Bayessche Theorem zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit für eine einwandfreie Schraube unter der Voraussetzung, sie wurde als Auschuß erfaßt, einsetzen.

$$(5\text{-}7) \qquad W(e/k) = \frac{W(e) \cdot W(k/e)}{W(e) \cdot W(k/e) + W(d) \cdot W(k/d)} \; ;$$

$$= \frac{0,99 \cdot 0,05}{0,99 \cdot 0,05 + 0,01 \cdot 0,998} = 0,8322.$$

Aus diesem Ergebnis folgt, daß der Anteil der einwandfreien Schrauben des Ausschusses $\Phi = 0,8322$ beträgt. Für den Erlös der Aktion a_1 (= Überprüfung des Ausschusses) folgt daraus:

$$e_1 = -1.500 + 10.000 \cdot 0,8322 = 6.822,- \text{ DM}.^{1)}$$

Da der Erlös der Aktion a_2 bei allen Werten von Φ den gleichen Betrag von $e_2 = 1.000,-$ DM zeigt, sollte der Ausschuß in jedem Fall nochmals überprüft werden.

Aufgrund dieses, für die Betriebsleitung wegen der vermeintlichen Präzision der Sortiermaschine unerwarteten Ergebnisses, überlegt man sich, ob eine weitere Kontrolle des verbliebenen Ausschusses vielleicht sinnvoll wäre. Von den entscheidungsrelevanten Daten haben sich die Erlösfunktionen wie folgt geändert, weil nunmehr der Ausschuss aus nur $N = 10.000 - 8.322 = 1.678$ Stücken besteht:

$$e_1 = -300 + 1.678 \cdot \Phi \; ;$$
$$e_2 = 167,80 \; .$$

Zur Bestimmung der Höhe des Anteils einwandfreier Schrauben setzt man die mit Hilfe des Bayesschen Theorems in (5-7) gefundene Wahrscheinlichkeit für einwandfreie Stücke der ersten Überprüfung gleich der A-priori-Wahrscheinlichkeit $W(e) = W(e/k)$ und berechnet dann mit dem Bayesschen Theorem die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer einwandfreien Schraube unter der Voraussetzung, daß sie bei zweimaligem Durchlauf durch die Sortiermaschine als Ausschuß erfaßt wurde. Es ergibt sich:

$$(5\text{-}7a) \qquad W(e/k_2) = \frac{0,8322 \cdot 0,05}{0,8322 \cdot 0,05 + 0,1678 \cdot 0,998} = 0,199 \; .$$

---

1 Wegen des objektiven Charakters der Wahrscheinlichkeiten handelt es sich hier nicht um einen Erwartungswert.

Unter dem restlichen Ausschuß befinden sich damit $\Phi = 0,199 \cdot 1,678 = 333,92 \approx 333$ einwandfreie Schrauben. Der Erlös der Aktion a_1 ist somit:

$$e_1 = -300 + 1.678 \cdot 0,199 = 33,- \text{ DM} .$$

In diesem Fall ist der Erlös der Aktion a_2 größer als der der Aktion a_1: $e_2 = 167,80 > e_1 = 33,-$ DM, so daß das Unternehmen nach einer einmaligen Überprüfung des Ausschusses des verbleibenden Ausschuß als Schrott verkaufen sollte.

Das Ergebnis dieses Beispiels zeigt, daß sich die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre keineswegs nur auf die Fälle beschränkt, in denen subjektive A-priori-Wahrscheinlichkeiten dem Entscheidungskalkül zugrunde zu legen sind, sondern auch objektive Wahrscheinlichkeiten verwendet werden, soweit diese vorhanden sind oder sich ermitteln lassen.[1]

In dem nun folgenden zweiten Beispiel sind jedoch die A-priori-Wahrscheinlichkeiten nicht technisch vorgegeben. Vielmehr ergeben sich gerade hinsichtlich ihrer Schätzung Probleme.[2] Dazu sei angenommen, daß ein Automobil-Produzent von einem ausländischen Lieferanten einen Posten von 50.000 Lichtmaschinen zum Preis von 40,- DM angeboten bekommen habe. Diese Lichtmaschinen sind um 10,- DM billiger als die auf dem inländischen Markt angebotenen Aggregate, die jedoch gegenüber den ausländischen den Vorteil haben, durch eine automatische Endkontrolle nahezu fehlerfrei zu sein. Eine Probelieferung von 1.000 Lichtmaschinen wies $x = 50$ oder $p = 0,05$ defekte Stücke auf. Dem Automobil-Produzenten stehen folgende Aktionen zur Auswahl,

---

1 Im Produktionsbereich dürften objektive Wahrscheinlichkeiten häufiger technisch vorgegeben sein. In unserem Beispiel ließen sich allerdings die A-priori-Wahrscheinlichkeiten auch schätzen oder mittels einer Stichprobe berechnen.

2 Ein ähnliches Beispiel findet sich bei George Hadley: Decision Theory ..., a.a.O., S. 429 ff.

deren Konsequenzen von dem unbekannten Anteil Θ der defekten Aggregate an der gesamten Lieferung abhängen:

a_1: Ablehnung des Angebotes und Kauf der Lichtmaschinen im Inland zum Preise von 40,- DM pro Stück;

a_2: Annahme des Angebots und Einbau der Aggregate ohne vorherige Prüfung der gesamten Lieferung. Da bei der Endkontrolle jedes Fahrzeug mit einer defekten Lichtmaschine erkannt wird, entstehen durch den Austausch der defekten Maschine Montage- und Ersatzteilkosten in Höhe von 250,- DM;

a_3: Annahme des Angebots und Montage der Lichtmaschinen nach vorheriger Überprüfung der gesamten Sendung. Die Kosten der Durchsicht betragen 250.000,- DM zuzüglich der Kosten für den Ersatz der defekten durch einwandfreie inländische Aggregate (Preisdifferenz: 10,- DM).

Aus den obigen Angaben lassen sich für die zur Verfügung stehenden Aktionen für die relevanten Kosten k folgende lineare Funktionen in Abhängigkeit zum Anteil Θ der defekten Stücke in der gesamten Sendung aufstellen:[1]

(5-8) $k(a_1,\Theta) = k_1 = 50.000 \cdot 10 = 500.000$;

(5-9) $k(a_2,\Theta) = k_2 = 250 \cdot 50.000 \cdot \Theta = 12.500.000 \cdot \Theta$;

(5-10) $k(a_3,\Theta) = k_3 = 250.000 + 50 \cdot 50.000 \cdot \Theta = 250.000 + 2.500.000 \cdot \Theta$.

Zur Bestimmung der optimalen Aktion bedarf es jetzt des Erwartungswertes des unbekannten Anteils der defekten Stücke $E_o(\Theta)$, um die erwarteten relevanten Kosten der einzelnen Aktionen $E_o(a_i)$ zu ermitteln. Der Anteil defekter Lichtmaschinen kann theoretisch zwischen $\Theta = 0$ und $\Theta = 1$ liegen, so daß sich hier das Problem der Bestimmung einer Dichtefunktion über dem möglichen Ausschußanteil Θ ergibt. A priori stehen dem Automobil-Produzen-

---

1 In diese Kostenfunktionen brauchen zur Lösung des Entscheidungskalküls nur die zusätzlichen oder relevanten Kosten eingehen, nicht aber die mit den einzelnen Aktionen verbundenen Gesamtkosten.

ten nur einige wenige Erfahrungswerte zur Verfügung, die zwar wohl zur Bestimmung des Erwartungswertes bzw. des Mittelwertes und der Standardabweichung ausreichen, nicht aber die Festlegung der exakten Gestalt der Dichtefunktion gestatten. Unter diesen Umständen reduziert sich das Problem auf die Suche nach einer mathematisch zu behandelnden Dichtefunktion, die den gewünschten Mittelwert und Standardabweichung aufweist; denn die exakte Gestalt der Verteilung ist, wie bereits für den Fall einer Normalverteilung gezeigt wurde, vielfach zur Berechnung des A-posteriori-Erwartungswertes oder der A-posteriori-Standardabweichung gar nicht erforderlich.[1]

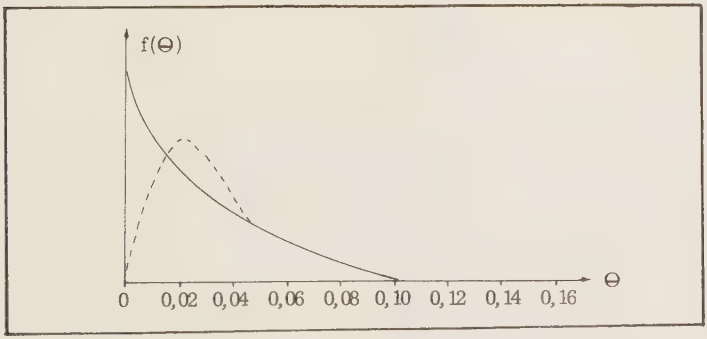
Es sei angenommen, daß der Hersteller den A-priori-Erwartungswert und die Standardabweichung wie folgt schätzt:

$$E_o(\Theta) = 0,02; \quad {}_o(\Theta) = 0,005.$$

Außerdem glaubt er, daß der Anteil defekter Stücke nicht über $\Theta = 0,1$ hinausgeht. Bei dem Versuch der Schätzung des Verlaufs der Dichtefunktion $f(\Theta)$ hält er die beiden Kurven der folgenden Abbildung 5-3 für möglich.

Abbildung 5-3

Mögliche A-priori-Wahrscheinlichkeitsverteilungen $f(\Theta)$ für den Anteil defekter Lichtmaschinen in der Lieferung



1 Vgl. das Beispiel der Einführung des Videorecorders in Abschnitt 4-2. Hier wurde gezeigt, daß sich der A-posteriori-Erwartungswert allein aufgrund des A-priori-Erwartungswertes und des Stichprobenmittelwertes, gewichtet mit den durchschnittlichen Varianzen,berechnen läßt. Vgl. dazu S.

Beide Funktionen der Abbildung 5-3 haben in ihrem Verlauf Ähnlichkeit mit Gammaverteilungen,[1] so daß sich eine Approximation der gesuchten Verteilung durch eine Gammaverteilung anbietet. Als besonderer Vorteil für das anstehende Entscheidungsproblem erweist sich dabei, daß bei relativ kleinen Werten für den Mittelwert und die Standardabweichung die Wahrscheinlichkeit für Werte von $\Theta > 0{,}1$ vernachlässigt werden kann.[2] Die Dichtefunktion einer Gammaverteilung n-ter Ordnung ist durch folgende Formel gegeben:[3]

$$(5\text{-}11) \qquad f_{\Gamma}(\Theta; \alpha, \nu) = \frac{\alpha^{\nu}}{\Gamma(\nu)} \cdot e^{-\alpha\Theta} \cdot \Theta^{\nu-1} \quad \text{für } \Theta > 0 \,.$$

Dabei sind der Mittelwert und die Varianz wie folgt festgelegt:

$$(5\text{-}12) \qquad E_o(\Theta) = \frac{\nu}{\alpha} \quad ;$$

$$(5\text{-}13) \qquad \sigma_o^2(\Theta) = \frac{\nu}{\alpha^2} \quad .$$

Es läßt sich zeigen, daß bei Festlegung des Erwartungs- bzw. Mittelwertes eine Gammaverteilung vollständig definiert ist, indem man (5-12) durch (5-13) dividiert:

$$(5\text{-}14) \qquad \alpha = \frac{E_o(\Theta)}{\sigma_o^2(\Theta)}$$

und (5-14) in (5-12) einsetzt:

$$(5\text{-}15) \qquad \nu = \left(\frac{E_o(\Theta)}{\sigma_o(\Theta)}\right)^2$$

Damit ergibt sich, daß die beiden positiven, reellen Parameter ν und α allein vom Erwartungswert und der Varianz einer Gammaverteilung abhängen, so daß mit ihrer Kenntnis eine Gammaverteilung vollständig bestimmt ist. Für unser Beispiel bedeutet das, daß der Automobil-Produzent weitere Angaben über die Gestalt der A-priori-Verteilung gar nicht mehr zu machen braucht, um

---

1 Zu den Eigenschaften von Gammaverteilungen vgl. u.a. Howard Raiffa and Robert Schlaifer: Decision Theory..., a.a.O., S. 222 ff.

2 Vgl. George Hadley: Decision Theory..., a.a.O., S. 431.

3 Dabei wurden die Symbole unseres Beispiels eingesetzt.

die gewünschten A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten zu berechnen.

Die Probelieferung[1] von 1.000 Lichtmaschinen läßt sich als Stichprobe bzw. zusätzliche Information interpretieren und dazu benutzen, eine Likelihood-Verteilung zu bestimmen. Theoretisch exakt sind die Likelihoods über eine Hypergeometrische Verteilung zu gewinnen, die hier jedoch durch eine Poissonverteilung approximiert werden kann.[2] Damit gilt für die Likelihoods: $W(X = x/\Theta_i) = f_P(x; \mu = n \cdot \Theta_i)$. Setzt man nun die A-priori-Verteilung in Form der Dichtefunktion der Gammaverteilung (5-11) und die Poissonverteilung für die Likelihoods in das Bayessche Theorem ein, berechnen sich die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen:

$$(5\text{-}16) \qquad f_1(\Theta_i/x_j) = \frac{f_P(x_j;\ \mu = n\cdot\Theta_i) \cdot f_\Gamma(\Theta_i;\ \alpha, \nu)}{\int_0^{+\infty} f_P(x_j;\ \mu = n\cdot\Theta_i) \cdot f_\Gamma(\Theta_i;\ \alpha, \nu) \cdot d\Theta} \ .$$

Durch einige Umformungen läßt sich zeigen, daß die A-posteriori-Verteilung der Form (5-16) wieder eine Gammaverteilung ist, deren Erwartungswert und Varianz nach den folgenden Formeln berechnet werden können.[3]

$$(5\text{-}17) \qquad E_1(\Theta) = \frac{\alpha + x}{\nu + n} \ ;$$

$$(5\text{-}18) \qquad \sigma_1^2(\Theta) = \frac{\alpha + x}{(\nu + n)^2} \ .$$

Der A-posteriori-Erwartungswert $E_1(\Theta)$ läßt sich über die Formel (5-17) allein durch den A-priori-Erwartungswert $E_o(\Theta)$, die A-priori-Varianz $\sigma_o^2(\Theta)$, das Stichprobenergebnis x und den Stichprobenumfang n berechnen, wenn man für α und ν die Formeln

---

1 Es sei angenommen, daß diese Probelieferung kostenlos erfolgt, um keine Schwierigkeiten mit den Kostenfunktionen zu bekommen.

2 Auf eine besondere Begründung kann wegen der Ausführungen in Abschnitt 3-2 und 3-3, S. 36 f. und S. 43 ff. verzichtet werden.

3 Vgl. George Hadley: Decision Theory..., a.a.O., S. 432. Bei vielen A-priori-Verteilungen ergeben sich A-posteriori-

(5-14) und (5-15) in (5-17) einsetzt, so daß:

$$(5\text{-}19) \qquad E_1(\Theta) = \frac{E_o(\Theta)^2 + x \cdot \sigma_o^2(\Theta)}{E_o(\Theta) + n \cdot \sigma_o^2(\Theta)} \quad .$$

Setzt man in die Gleichung (5-19) die dem Entscheidungsproblem unseres Beispiels zugrunde liegenden Daten ein, ergibt sich:

$$(5\text{-}19a) \qquad E_1(\Theta) = \frac{0,02^2 + 50 \cdot 0,005^2}{0,02 + 1000 \cdot 0,005^2} = 0,0367 \; .$$

Diesen A-posteriori-Erwartungswert für den Anteil defekter Lichtmaschinen an der Gesamtlieferung kann man jetzt dazu benutzen, um die e r w a r t e t e n Konsequenzen der Aktionen a_i zu berechnen, indem man in die Funktionen der relevanten Kosten (5-8), (5-9) und (5-10) anstelle der unabhängigen Variablen Θ deren A-posteriori-Erwartungswert $E_1(\Theta) = 0,0367$ einsetzt. Damit ergeben sich die A-posteriori-Erwartungswerte der Aktionen a_2 und a_3 wie folgt:

$$E_1(a_2) = 12.500.000 \cdot E_1(\Theta) = 458.750,- \text{ DM} ;$$
$$E_1(a_3) = 250.000 + 2.500.000 \cdot E_1(\Theta) = 341.750,- \text{ DM} .$$

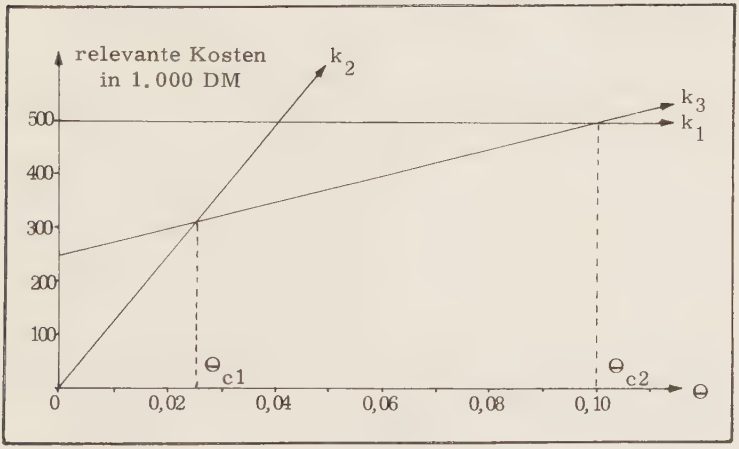
Da die Kosten der Aktion a_1 für jeden Θ-Wert gleich sind: $k_1 = 500.000,-$ DM, sollte der Automobil-Produzent bei den vorliegenden Informationen und den gegebenen entscheidungsrelevanten Daten die Aktion a_3 wählen; das heißt, er sollte das Angebot des ausländischen Lieferanten annehmen, jedoch vor Einbau der Aggregate eine vollständige Überprüfung der Lieferung durchführen. Die Aktion a_3 weist gegenüber den anderen Aktionen die geringsten zu erwartenden Kosten auf; wählt der Produzent nämlich die Aktion a_1 (= Ablehnung des Angebots), erwarten ihn dabei relevante Kosten in Höhe von 500.000,- DM mit Sicherheit, und für die Aktion a_2 (= Einbau ohne Prüfung) ergeben sich durchschnittliche Kosten in Höhe von 458.750,- DM.

Verteilungen, die der gleichen Verteilungsklasse angehören, wie die A-priori-Verteilung. A-priori-Verteilungen, die in einem natürlichen mathematischen Zusammenhang zur Likelihood-Funktion stehen und den obigen Zusammenhang hervorrufen nennt man "natural conjugates". Vgl. dazu S i e g f r i e d S t u r m : Mehrstufige Entscheidungen unter Ungewißheit. Zur Theorie adaptiver Prozesse. Meisenheim/Glan 1970, S. 12 ff.

Die folgende Abbildung 5-4 gibt Auskunft darüber, welche Entscheidungen der Automobil-Produzent bei alternativen Ausschußanteilen bzw. A-posteriori-Erwartungswerten $E_1(\Theta_i)$ treffen sollte. Durch Gleichsetzen der Funktionen für die relevanten Kosten, lassen sich für die möglichen Ausschußquoten kritische Werte Θ_c ermitteln, die anzeigen bei welcher Ausschußquote zwei Aktionen gleich günstig sind.

Abbildung 5-4

Funktionen der relevanten Kosten für die Aktionen a_i in Abhängigkeit zur Ausschußquote Θ



Aus der Abbildung 5-4 ist zu ersehen, daß bei einem Erwartungswert von $E_1(\Theta) < \Theta_{c1} = k_2 - k_3 = 0,025$ die Aktion a_2 optimal ist. Liegt dagegen der A-posteriori-Erwartungswert zwischen Θ_{c1} und Θ_{c2} erweist sich die Aktion a_3 als optimale Aktion. Erst wenn der A-posteriori-Erwartungswert für Θ größer sein sollte als $\Theta_{c2} = k_2 - k_1 = 0,1$ sollte die Aktion a_1 gewählt werden. Mit Hilfe der Abbildung 5-4 läßt sich auch gut eine Sensibilitätsanalyse des Entscheidungskalküls im Hinblick auf Schwankungen der Ausschußquote durchführen, so daß der Unternehmer in den Fällen, in denen sich ein A-posteriori-Erwartungswert ergibt, der relativ nahe bei einem kritischen Ausschußanteil liegt, vielleicht nochmals seine Berechnungen

und A-priori-Schätzungen überprüft, ehe er die mit der Bayesschen Entscheidungsregel ermittelte optimale Aktion wählt.

Unser Beispiel zeigt, daß die Bayessche Entscheidungslehre auch bei Entscheidungen, deren ökonomische Konsequenzen von der Höhe eines a priori nur vage bekannten Ausschußanteils abhängen, zu brauchbaren Ergebnissen führt. Als besonders vorteilhaft erweist es sich, daß selbst bei alleiniger Schätzung des Erwartungswertes und der Standardabweichung a priori ohne Vorstellungen über das zugrundeliegende Verteilungsgesetz sich unter gewissen Voraussetzungen die relevanten A-posteriori-Größen ohne größere Schwierigkeiten berechnen lassen. Gleichzeitig wurde gezeigt, daß eine Kombination aus einer kontinuierlichen und einer diskreten Verteilung mit Hilfe des Bayesschen Theorems möglich ist. Als besonderer Vorteil erweist sich dabei die Tatsache, daß unter den angenommenen Modellvoraussetzungen die A-posteriori-Verteilung zur gleichen Klasse von Verteilungen gehört wie die A-priori-Verteilung, so daß bei Entscheidungsproblemen dieser Art sich die Parameter der A-posteriori-Verteilung direkt aus den Parametern der A-priori-Verteilung und der Likelihood-Funktion ergeben.[1]

Neben den Anwendungsmöglichkeiten der Bayesschen Entscheidungslehre in den Beispielen dieses Kapitels dürften sich für den Produktionsbereich noch weitere Entscheidungssituationen ergeben, in denen die Bayessche Entscheidungslehre zu ökonomisch vertretbaren Ergebnissen führen könnte. So ließe sich z.B. bei der Qualitätskontrolle analog zu Kapitel 3 vorgehen, oder bei der Wahl zwischen zwei Herstellungsverfahren mit linearen Kostenfunktionen und einer kontinuierlich verteilten Umweltvariablen für die zu produzierende Menge könnte das Konzept des Kapitels 4 analog angewendet werden.

---

1 Vgl. dazu die Ergebnisse des Abschnitts 4-2.

6 DIE BAYESSCHE ENTSCHEIDUNGSLEHRE ALS GRUNDLAGE DER INVESTITIONS- UND FINANZPLANUNG

6-1 Bayessche Analyse von Investitionsentscheidungen mit Hilfe von Entscheidungsbäumen

Investitionsentscheidungen gehören aus folgenden Gründen zu den wichtigsten und schwierigsten unternehmenspolitischen Entscheidungen überhaupt:[1]

(1) Mit den Entscheidungen ist meistens die Ausgabe eines in Bezug auf die sonstigen betrieblichen Ausgaben relativ hohen Geldbetrages verbunden.

(2) Wegen der langen Nutzungsdauer von Investitionsgütern wird durch das Treffen solcher Entscheidungen in der Regel auch die Unternehmenspolitik auf längere Sicht festgelegt.

(3) Durch die Länge des Planungszeitraums bedingt sind Investionsentscheidungen mit einer weitaus höheren Unsicherheit behaftet als andere Entscheidungen.[2]

---

1 Neben den Entscheidungen über die Vorteilhaftigkeit mehrerer Investitionsvorhaben gehören auch die Bestimmung des optimalen Ersatzzeitpunktes von Anlagen, die Ermittlung der optimalen Investitionsausgabe und die Festsetzung der optimalen Lebensdauer einer einzigen Investition zu den Investitionsentscheidungen.

2 Bei den herkömmlichen Verfahren der Wirtschaftlichkeitsrechnung wie der Kapitalwertmethode, dem Verfahren des internen Zinsfußes, der Annuitätenmethode oder der Pay-off-Methode wird der Aspekt der Unsicherheit einfach durch die Annahme sicherer Erwartungen eliminiert. Vgl. zu den obigen Methoden u.a. Ludwig Pack: Betriebliche Investition. Wiesbaden 1959. Matthias Heister: Rentabilitätsanalyse von Investitionen! Köln und Opladen 1962.
Die Behandlung der Unsicherheit bei Investitionsentscheidungen erfolgte in der betriebswirtschaftlichen Literatur erst relativ spät und zögernd. Vgl. hierzu u.a. Horst Albach: Wirtschaftlichkeitsrechnung unter unsicheren Erwartungen. Köln und Opladen 1959. Dieter Schneider: Investition ..., a.a.O.

Eins der häufigsten Entscheidungsprobleme im Investitionsbereich besteht darin, daß der Entscheidende unter mehreren Investitionsalternativen wählen muß, die sich in Bezug auf ein oder mehrere Merkmale wie Anschaffungspreis, Einsatzmöglichkeiten, technische Daten oder Einnahmen- und Ausgabenströme unterscheiden. Dabei wird der Entscheidende bei Verfolgung des Prinzips der Gewinnmaximierung darum bemüht sein, die Alternative zu wählen, die seinen mutmaßlichen Gewinn maximiert.

Viele der Entscheidungsprobleme im Investitionsbereich dürften gleiche oder ähnliche Voraussetzungen aufweisen wie bereits in anderen Kapiteln untersuchte Entscheidungssituationen, so daß eine analoge Übertragung der dort angewandten Bayesschen Lösungsverfahren auf diese Entscheidungsprobleme ohne weiteres möglich ist.[1] Da es ein Ziel dieser Untersuchung ist, mehrere Varianten und Lösungstechniken der Bayesschen Entscheidungslehre bei jeweils typischen Entscheidungssituationen in der verschiedenen Sektoren eines Unternehmens abzuhandeln, soll eine explizite Untersuchung analoger Lösungsverfahren hier unterbleiben. Stattdessen soll anhand des folgenden Beispiels gezeigt werden, wie die Bayessche Entscheidungslehre zur Analyse langfristiger Investitionsplanungen herangezogen werden kann. Dazu sei folgendes unterstellt: Ein Unternehmer plant, ein auf dem inländischen Markt sehr erfolgreiches Produkt ins Ausland zu exportieren. Dazu ist eine Erweiterung seiner bisherigen Produktionsanlagen durch Zukauf neuer Maschinen erforderlich. Zur Auswahl stehen die beiden Maschinen A und B, die sich im wesentlichen durch ihre Kapazität und ihren Kaufpreis unterscheiden. Damit hängt die Vorteilhaftigkeit beider Anlagen von der im Ausland zu erwartenden Nachfrage nach dem betreffenden

---

1 Hängt z.B. die Vorteilhaftigkeit von mehreren zur Auswahl stehenden Maschinen nur von der Menge der zu produzierenden Einheiten ab, könnte man bei Vorliegen linearer Kostenfunktionen ähnlich wie im Beispiel des Kaufs ausländischer Lichtmaschinen (Abschnitt 5-2) vorgehen.

Produkt ab. Der Planungszeitraum möge sich über sechs Jahre erstrecken. Wenn anfänglich die kleinere der beiden Anlagen (Maschine A) gekauft wird, soll nach Ablauf von zwei Jahren erneut darüber entschieden werden, ob gegebenenfalls eine zweite kleine Anlage anzuschaffen ist. Damit handelt es sich hier um ein sequentielles Entscheidungsproblem mit den folgenden Aktionsmöglichkeiten auf der Stufe 1:

a_1: Kauf der Anlage A;
a_2: Kauf der Anlage B.

Unter der Bedingung, daß die Aktion a_1 gewählt wird, hat die Unternehmensführung nach zwei Jahren auf der Entscheidungsstufe 3 erneut eine Entscheidung zwischen den folgenden Aktionsmöglichkeiten zu treffen, deren Vorteilhaftigkeit von der Nachfrage der ersten beiden Jahre abhängt:

a_3 : Kauf einer zweiten Anlage A;
a_4 : kein weiterer Kauf.

Die Marketingabteilung des Unternehmens hält für die Anlaufzeit der ersten zwei Jahre drei unterschiedliche Absatzniveaus (H=hoch, M=mittel und N=niedrig) für möglich und ordnet ihnen aufgrund der Erfahrungen mit dem gleichen Produkt auf dem Inlandsmarkt die der folgenden Tabelle 6-1 zu entnehmenden subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten zu. Außerdem ist man in der Lage, die bedingten Wahrscheinlichkeiten (A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten) dafür zu schätzen, daß der Absatz in den der Anlaufphase folgenden Jahren ein bestimmtes Niveau erreicht, wenn die Anfangsnachfrage entweder hoch, mittel oder niedrig war.

Tabelle 6-1
Mögliche Absatzniveaus; geschätzte A-priori- und A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten

Absatzniveau	A-priori-Wahrscheinlichkeit	A-posteriori-Wahrscheinlichkeit, wenn anfängl. Absatz:		
		Hoch	Mittel	Niedrig
Hoch (H)	0,2	0,7	0,2	0,1
Mittel (M)	0,3	0,2	0,6	0,1
Niedrig (N)	0,5	0,1	0,2	0,8
Σ	1,0	1,0	1,0	1,0

Die beiden zur Auswahl stehenden Anlagen A und B weisen die in der folgenden Tabelle 6-2 wiedergegebenen Anschaffungskosten und durchschnittlichen jährlichen Überschüsse der Einzahlungen über die Auszahlungen auf.[1]

Tabelle 6-2

Anschaffungskosten und durchschnittliche jährliche Zahlungsüberschüsse der Anlagen A und B

Anlage	Anschaffungskosten	Überschüsse in Mio DM bei Absatz v.		
		H	M	N
A	130.000	100	100	80
B	200.000	200	140	80

Aus den Angaben der Tabellen 6-1 und 6-2 können die Überschüsse der Einnahmeströme über die Ausgabeströme im Verlauf des Planungszeitraums bei unterschiedlichen Entscheidungen aufgestellt werden. Die Reihen der Zahlungsüberschüsse der einzelnen Aggregate werden dann mit einem internen Zinsfuß in Höhe von 10% auf den Gegenwartswert diskontiert. Zieht man von diesem die Anschaffungskosten der jeweiligen Anlage ab, erhält man den Nettogegenwartswert als Konsequenz der einzelnen Entscheidungen. Lediglich die Investitionsausgabe auf der Stufe 3 in Höhe von 130.000,- DM wurde mit ebenfalls 10% auf den Gegenwartswert diskontiert, weil diese Ausgabe erst nach zwei Jahren erfolgt, wenn die Aktion a_{11} gewählt wird. Die Ermittlung der Nettogegenwartswerte ist der nebenstehenden Tabelle 6-3 zu entnehmen. Diese zeigt in den beiden ersten Spalten die Absatzniveaus der Entscheidungsstufen 1 und 2, denen in den zwei folgenden Spalten sämtliche Aktionsmöglichkeiten gegenübergestellt werden. Der mittlere Teil der Tabelle gibt die Reihe der Zahlungsüberschüsse pro Jahr des Planungszeitraums von sechs Jahren an. Die beiden letzten Spalten zeigen die Summe der diskontierten Zahlungsüberschüsse als Gegenwartswerte bzw. abzüglich der Investitionskosten die Nettogegenwarts-

1 Bei den hier unterstellten Zahlungsströmen möge das Problem der Zuordnung ausgeklammert sein, das darin besteht, daß viele Anlagen für sich allein nicht nutzbar sind, sondern in funktionalem Zusammenhang mit anderen Investitionen stehen.

Tabelle 6-3

Nettogegenwartswerte der mit den einzelnen Investitionsentscheidungen verbundenen Zahlungsüberschußreihen bei alternativen Absatzniveaus (H=hoch, M=mittel, N=niedrig) und einem internen Zinsfuß von 10%

Absatzniveau im Jahr		Entscheidung auf der Stufe		Zahlungsüberschüsse im Planungszeitraum						Gegenwartswerte	Nettogegenwartswerte
1 und 2	3 bis 6	1	3	1	2	3	4	5	6		
H	H	a_1	a_4	100	100	100	100	100	100	435,52	305,52
H	M	a_1	a_4	100	100	100	100	100	100	435,52	305,52
H	N	a_1	a_4	100	100	80	80	80	80	383,07	253,07
M	H	a_1	a_4	100	100	100	100	100	100	435,52	305,52
M	M	a_1	a_4	100	100	100	100	100	100	435,52	305,52
M	N	a_1	a_4	100	100	80	80	80	80	383,07	253,07
N	H	a_1	a_4	80	80	100	100	100	100	400,77	270,77
N	M	a_1	a_4	80	80	100	100	100	100	400,77	270,77
N	N	a_1	a_4	80	80	80	80	80	80	348,42	218,42
H	H	a_1	a_3	100	100	200	200	200	200	697,49	460,04
H	M	a_1	a_3	100	100	140	140	140	140	540,31	460,04
H	N	a_1	a_3	100	100	80	80	80	80	383,12	145,67
M	H	a_1	a_3	100	100	200	200	200	200	697,49	460,04
M	M	a_1	a_3	100	100	140	140	140	140	540,31	302,86
M	N	a_1	a_3	100	100	80	80	80	80	383,12	145,67
N	H	a_1	a_3	80	80	200	200	200	200	662,78	425,33
N	M	a_1	a_3	80	80	140	140	140	140	505,60	268,15
N	N	a_1	a_3	80	80	80	80	80	80	348,41	110,96
H	H	a_2	-	200	200	200	200	200	200	871,04	671,04
H	M	a_2	-	200	200	140	140	140	140	713,86	513,86
H	N	a_2	-	200	200	80	80	80	80	556,67	356,67
M	H	a_2	-	140	140	200	200	200	200	766,91	566,91
M	M	a_2	-	140	140	140	140	140	140	609,73	409,73
M	N	a_2	-	140	140	80	80	80	80	452,54	252,54
N	H	a_2	-	80	80	200	200	200	200	662,78	462,78
N	M	a_2	-	80	80	140	140	140	140	505,60	305,60
N	N	a_2	-	80	80	80	80	80	80	348,41	148,41

werte. Mit Hilfe der Daten der Tabellen 6-1, 6-2 und 6-3 läßt sich jetzt für das Entscheidungsproblem unseres Beispiels ein Baumdiagramm oder Entscheidungsbaum entwikkeln.[1] Dieser in der nebenstehenden Abbildung wiedergegebene Entscheidungsbaum läßt sich folgendermaßen interpretieren: Im Ausgangspunkt auf der Stufe 1 hat der Entscheidende die Wahl zwischen den Aktionen a_1 und a_2. Ist eine Entscheidung für die Aktion a_1 (= Anlage A) erfolgt, kann sich der Entscheidende auf der Stufe 3 nochmals für oder gegen den Kauf einer zweiten Anlage A (Aktion a_{11}) entscheiden. Diese Entscheidung ist wiederum abhängig davon, welches der drei möglichen anfänglichen Absatzniveaus eingetreten ist. Die Konsequenzen der Entscheidungen auf den Stufen 1 und 3 werden durch die Nettogegenwartswerte der Zahlungsüberschüsse (Werte der letzten Spalte der Tabelle 6-3) wiedergegeben.

Die Lösung des Entscheidungskalküls aufgrund des Vergleichs der mit den Aktionen verbundenen erwarteten Nettogegenwartswerte $E(a_i)$ erfolgt mit Hilfe der Roll-back-Analyse,[2] indem man die bedingten Nettogegenwartswerte der Zahlungsüberschüsse mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Absatzniveaus der Stufe 4 gewichtet und für jede Entscheidung auf der Stufe 3 summiert. Die Aktion mit dem niedrigsten Erwartungswert wird als nicht optimal verworfen (Querstrich durch den Ast der Aktion). Bei der Wahl der Aktion a_2 (Anlage B) auf der Stufe 1 ist diese Vorgehensweise nicht erforderlich, weil in diesem Fall auf der Stufe 3 keine Entscheidung mehr getroffen wird. Die Erwartungswerte der nicht verworfenen Aktionen werden dann mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten der Tabelle 6-1 für das Eintreffen der anfänglichen Absatzniveaus der Stufe 2 gewichtet und aufsummiert. Die Aktion, die jetzt auf der Ausgangsstufe 1 den größten Erwartungswert aufweist ist optimal.

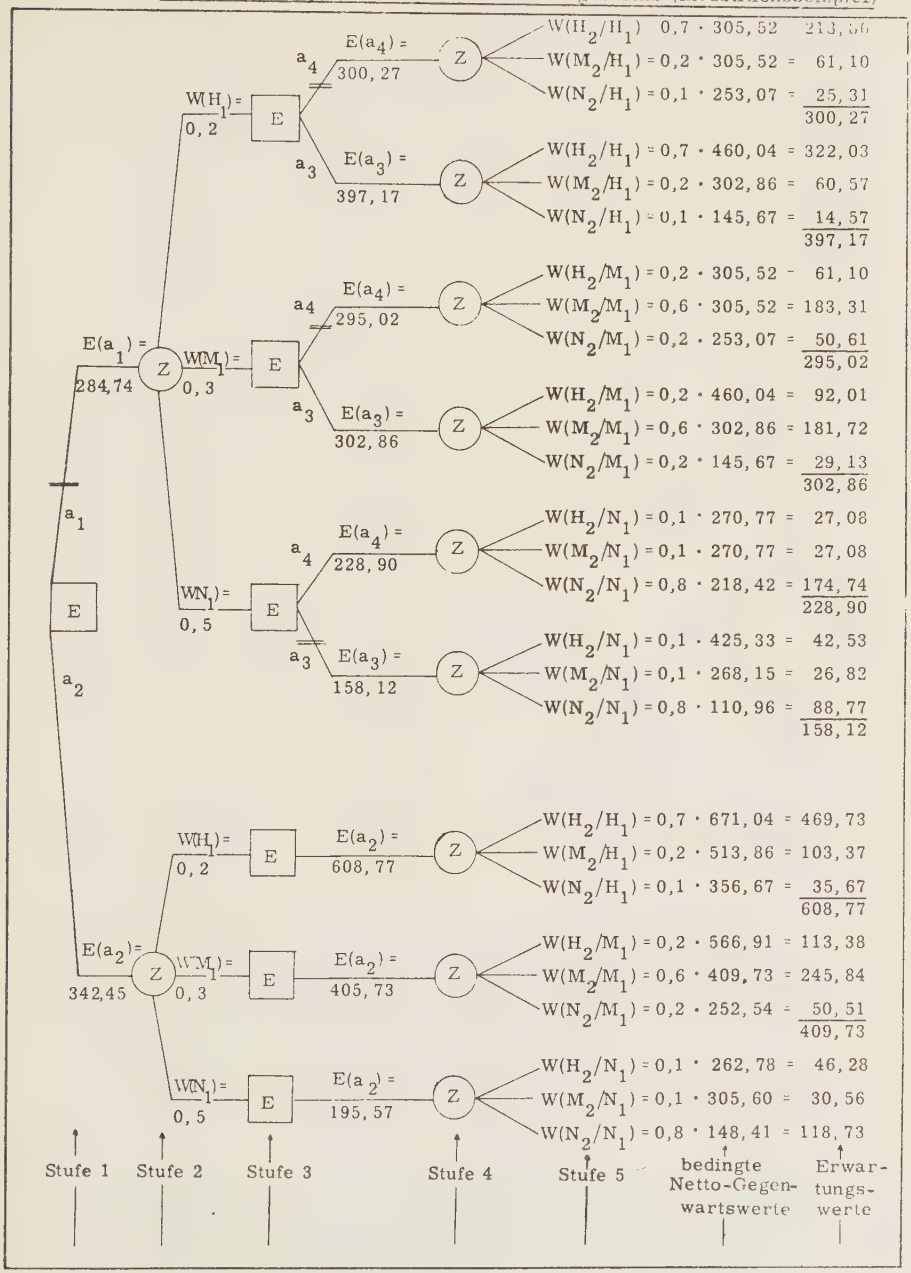
---

1 Ein ähnliches Beispiel findet man auch bei James C. T. Mao: Quantitative Analysis of Financial Decisions. London 1969, S. 307 ff.

2 Zur Rool-back-Analyse vgl. das Beispiel der Maschineneinstellung in Abschnitt 5-1.

Abbildung 6-1

Roll-back-Analyse anhand des Entscheidungsbaums (Investitionsbeispiel)



Die einzelnen Stufen des Entscheidungsbaums der Abbildung 6-1 stehen abwechselnd für Zufall (eingekreistes Z) und Entscheidung (E im Rechteck), so daß die Unternehmensführung auf der Stufe 1 zwischen a_1 und a_2 entscheidet; auf der Stufe 2 kommt der Zufall in Form der anfänglichen Nachfrage mit den A-priori-Wahrscheinlichkeiten, aufgrund derer auf der Stufe 3 wieder eine Entscheidung getroffen wird, wenn anfänglich die Aktion a_1 (obere Teil des Entscheidungsbaums) gewählt wurde. Auf der Stufe 4 spielt wieder der Zufall mit den A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten eine Rolle, die das Ergebnis der gewählten Aktionen beeinflussen. Als Ergebnis der Roll-back-Analyse folgt, daß die Unternehmensführung von vornherein die Anlage B (Aktion a_2) kaufen sollte, weil der Erwartungswert dieser Aktion der größere ist: $E(a_2) = 342,45$ $E(a_1) = 284,74$ Mio DM.

Wenn auch die Lösung des Entscheidungsproblems in einigen Punkten Ähnlichkeit mit der des Beispiels der Maschineneinstellung des Abschnitts 5-1 hat, liegt doch ein wesentlicher Unterschied schon allein in der Problemstruktur. Während beim Beispiel der Maschineneinstellung die Frage zu klären war, ob die Bayessche Entscheidunglehre sich zur Aufstellung von sequentiellen Stichprobenplänen eignet, liegt hier das Problem in der Aufspaltung des Planungshorizonts in mehrere Entscheidungsstufen. Ein weiteres unterscheidendes Merkmal ergibt sich aus den anzusetzenden Wahrscheinlichkeiten, die im Beispiel des Abschnitts 5-1 mit Hilfe des Bayesschen Theorems berechnet wurden, wogegen bei diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeiten auf beiden Entscheidungsstufen geschätzt werden mußten.[1]

---

1 Bisher wurde davon ausgegangen, daß zwar wohl die A-priori-Wahrscheinlichkeiten oder die Likelihoods geschätzt werden können, die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten aber als "objektivierte" A-priori-Wahrscheinlichkeiten jedoch nicht. Unter den Umständen dieses Beispiels erscheint diese Vorgehensweise zweckmäßig, da es trotz der erheblichen Unsicherheit dieser Wahrscheinlichkeiten immer noch besser ist zu rechnen als mit "Daumenpeilmethoden" vorzugehen.

Unser Beispiel sollte zeigen, daß es mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre möglich ist, durch die Aufspaltung des Planungshorizonts einen wesentlichen Mangel anderer Lösungsverfahren bei Investitionsentscheidungen[1] unter Unsicherheit zu vermeiden: die zeitlich isolierte Betrachtung von Investitionsvorhaben.[2]
Die Bayessche Entscheidungslehre ermöglicht, die Interdependenzen zwischen momentanen Entscheidungen, der Unsicherheit zu verschiedenen Zeitpunkten und weiteren Entscheidungen zu späteren Zeitpunkten zu berücksichtigen.[3] Gleichzeitig klärt die Analyse, wie abhängig die Vorteilhaftigkeit einer Entscheidung auf einer bestimmten Stufe von den Entscheidungen der zeitlich davor liegenden Stufen ist.
Schließlich ist es ein weiterer Vorteil, daß die Anwendung der hier vorgestellten Lösungsmethode gar nicht von irgendwelchen objektiven Wahrscheinlichkeiten abhängt, sondern auch eine subjektive Schätzung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten zulässig ist. Besonders bei Investitionsentscheidungen dürfte wegen der Länge des Planungszeitraums die Möglichkeit zur Erhebung von Stichproben nicht gegeben sein. Wie bei allen vorgestellten Lösungsverfahren gilt natürlich auch hier, daß der Entscheidende bei der Schätzung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten eine sorgfältige Analyse der das Entscheidungsproblem beeinflussenden Faktoren vornehmen sollte.

---

1 Vgl. zu anderen Lösungsverfahren u.a. R. M. Adelson: Criteria for Capital Investment: An Approach through Decision Theory. In: Operational Research Quaterly, Vol 16 (1965), S. 19 ff.

2 Zur Kritik an der zeitlich isolierten Betrachtungsweise von Investitionen vgl. Pierre Massé: Optimal Investment Decisions. Englewood Cliffs (New Jersey) 1962, S. 250 f.

3 Vgl. u.a. James C. T. Mao: Financial Decisions ..., a.a.O., S. 307. John F. Magee: How to Use Decision Trees in Capital Investment. In: Havard Business Review, Vol. 42 (1964), S. 79 - 96.

6-2 Bayessche Prognose des Liquiditätsrisikos von Finanzierungsentscheidungen

Bei Finanzierungsentscheidungen[1] hängen die Beschaffungsmöglichkeiten von Geldmitteln[2] und die Vorteilhaftigkeit der einzelnen Finanzierungsalternativen einerseits von der Rechtsform und der wirtschaftlichen Lage des Unternehmens ab, anderseits werden sie von der Wahl der Finanzierungsart wie Finanzierung über den Umsatzerlös, durch Kapitalumschichtungen oder über den Kapitalmarkt bestimmt. Daher rührt eine Fülle von unterschiedlichen Entscheidungsproblemen auf dem Finanzierungssektor eines Unternehmens, für deren Lösung zum Teil bereits quantitative Methoden entwickelt wurden.[3] Dazu leistet die Bayessche Entscheidungslehre den folgenden Lösungsbeitrag, dessen Grundidee von einem Zusammenhang zwischen dem Verschuldungsgrad und dem wirtschaftlichen Erfolg oder Mißerfolg einer Unternehmung ausgeht. Der Verschuldungsgrad wird dabei als bilanzielle Kennziffer durch das Verhältnis zwischen Fremd- und Eigenkapital oder zwischen Fremd- und Gesamtkapital gemessen:[4]

$$\text{Verschuldungsgrad} = \frac{\text{Fremdkapital}}{\text{Eigenkapital}} \text{ ; oder auch:}$$

$$\text{Verschuldungsgrad} = \frac{\text{Fremdkapital}}{\text{Gesamtkapital}} .$$

---

1 Der Begriff "Finanzierung" wird in der betriebswirtschaftlichen Literatur keineswegs einheitlich interpretiert. Vgl. dazu u.a. Ludwig Pack: Betriebliche Investition ..., a.a.O., S. 77; Liesel Beckmann: Finanzierung. In: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. 3. Aufl. Bd. 2, Stuttgart 1958, Sp. 1830 ff.

2 Unter Finanzierung im weiteren Sinne läßt sich die Beschaffung von Geldmitteln verstehen. Vgl. Karl Hax: Langfristige Finanz- und Investitionsentscheidungen. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften. Hrsg. von K. Hax und Th. Wessels. . überarbeitete und erweiterte Aufl. Bd. I: Die Betriebswirtschaft. Köln und Opladen 1966, S. 416.

3 Einen guten Überblick über diese Methoden gibt James C. T. Mao: Financial Decisions ..., a.a.O.

4 Vgl. dazu Knut Schacht: Die Bedeutung der Finanzierungsregeln für unternehmerische Entscheidungen. Bd. 17 der Schriftenreihe "Betriebswirtschaftliche Beiträge". Hrsg. H. Münstermann. Wiesbaden 1971, S. 15.

Erfolg oder Mißerfolg bezieht sich dann auf die Möglichkeit zur Einhaltung der Liquidität als der Fähigkeit eines Unternehmens, seinen laufenden Zahlungsverpflichtungen nachkommen zu können.[1] Dieser unterstellte Zusammenhang zwischen Verschuldungsgrad und Einhaltung der Liquidität läßt sich dazu benutzen,[2] Wahrscheinlichkeiten für den voraussichtlichen Erfolg von Finanzierungsmaßnahmen aufzustellen, indem man mit Hilfe des Bayesschen Theorems die bedingte (A-posteriori-) Wahrscheinlichkeit dafür berechnet, daß ein Unternehmen in Liquiditätsschwierigkeiten gerät, nachdem sich ein bestimmter Verschuldungsgrad gezeigt hat.[3] Die dadurch ermittelte Wahrscheinlichkeit dient dann als Prognoseinformation für den Entscheidenden zur Beurteilung der Liquiditätsrisiken, die er in Verbindung mit mehreren Finanzierungsalternativen eingeht. Voraussetzung zur Berechnung dieser Wahrscheinlichkeiten ist allerdings das Vorhandensein von empirischen Erhebungen, die Auskunft geben sowohl über den Anteil der überhaupt in Zahlungsschwierigkeiten geratenen Unternehmen als auch über den Anteil der Unternehmen, die bei einem bestimmten Verschuldungsgrad innerhalb der darauf folgenden Jahre erfolgreich oder erfolglos waren. Wichtig ist dabei, daß

---

1 Zum Liquiditätsbegriff vgl. u.a. Wolfgang Stützel: Liquidität. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften. Bd. 6. Stuttgart · Tübingen · Göttingen 1959, S. 622 ff.

2 Zu dieser Prämisse ist zu bemerken, daß trotz der häufig geforderten bestimmten Mindestrelationen zwischen Eigen- und Fremdkapital und der bei Unternehmen der gleichen Branche vielfach zu beobachtenden ähnlichen Kapitalstrukturverhältnisse der Verschuldungsgrad nur ein Indiz unter vielen zur Bestimmung der Liquidität oder Rentabilität darstellt. Vgl. insbesondere hierzu Dietrich Härle: Finanzierungsregeln und ihre Problematik. Wiesbaden 1961, S. 86 ff.

3 Die Anwendung des Bayesschen Theorems zur Ermittlung solcher Wahrscheinlichkeiten erfolgte erstmals bei William H. Beaver: Financial Ratios as Predictors of Failure. In: Empirical Research in Accounting: Selected Studies. Ed. by S. Davidson. In: Journal of Accounting Research, Vol.4 (1966), S. 77ff.

diese Beobachtungen für alle Unternehmen einer Untersuchungsgesamtheit durchgeführt werden, da sonst die A-priori-Wahrscheinlichkeiten, die man aus diesen Untersuchungen gewinnt, die Voraussetzungen des Bayesschen Theorems nicht erfüllen.[1]

Anhand des folgenden Beispiels möge diese Variante der Bayesschen Entscheidungslehre verdeutlicht werden: Eine KG, deren Gewinnsituation in den vergangenen Jahren nicht zuletzt wegen ihrer veralteten Produktionsanlagen nicht besonders gut war, möchte eine Rationalisierungsinvestition durchführen, um wieder Anschluß an die Konkurrenz zu gewinnen. Der dazu erforderliche Geldbetrag in Höhe von 600.000,- DM ist aus eigenen Mitteln der Gesellschafter oder durch Einbehalten von Gewinnen nicht zu beschaffen. Letztlich bleibt die Wahl nur zwischen den folgenden zwei Finanzierungsalternativen:

a_1: Aufnahme eines Bankdarlehens in Höhe von 600.000,- DM zu den üblichen Zins- und Tilgungskonditionen;

a_2: Aufnahme eines neuen Kommanditisten, der sich mit einer Einlage von 600.000,- DM beteiligt.

Gegen die erste Alternative spricht, daß unter Umständen die Zins- und Tilgungsverpflichtungen zu hoch sind, um sie in den beiden ersten Jahren bis zur Erreichung einer normalen Ertragslage erfüllen zu können, wodurch ernsthafte Liquiditätsschwierigkeiten befürchtet werden. Anderseits möchte man nach Überbrükkung der Anschlußschwierigkeiten an die Konkurrenz nicht die aufgrund des Branchentrends zu erwartenden hohen Gewinne mit einem weiteren Gesellschafter teilen.

---

1 Nach Schacht existieren solche Untersuchungen in Deutschland kaum, wohl aber in den U.S.A. Vgl. Knut Schacht: Finanzierungsregeln..., a.a.O., S. 78 f. Beaver geht in seiner Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Liquiditätsrisiko und Verschuldungsgrad von empirischen Zahlenmaterial aus. Jedoch stellt er einer beliebigen Anzahl von in Schwierigkeiten geratener Unternehmen eine gleiche Anzahl erfolgreicher Unternehmen der gleichen Branche gegenüber. Vgl. William H. Beaver: Financial Ratios ..., a.a.O., S. 71 ff.

Dem Geschäftsführer als Entscheidungsträger stehen folgende Informationen, die vom Verband der betreffenden Branche ermittelt wurden, zur Verfügung:

(1) Von den 1.000 Unternehmen der Branche haben in den letzten fünf Jahren 150 oder 15% aus Gründen der Zahlungsschwierigkeit Konkurs angemeldet (Ereignis K).

(2) Außerdem existiert eine Aufstellung über den Verschuldungsgrad (V_i, i = 0 bis unter 0,1, 0,1 bis unter 0,2, ..., 1,0 und darüber) und die Konkurshäufigkeit in Form der folgenden Tabelle 6-4.

Tabelle 6-4

Verteilung der erfolgreichen und nicht erfolgreichen Unternehmen in Abhängigkeit zu ihrem Verschuldungsgrad V_i

Verschuldungsgrad (V_i)	Anteil der Unternehmen mit	
	Konkurs (K)	kein Konkurs ($\bar{K}$)
0 bis unter 0,1	0,000	0,050
0,1 bis unter 0,2	0,012	0,080
0,2 bis unter 0,3	0,040	0,154
0,3 bis unter 0,4	0,062	0,202
0,4 bis unter 0,5	0,075	0,283
0,5 bis unter 0,6	0,102	0,142
0,6 bis unter 0,7	0,131	0,039
0,7 bis unter 0,8	0,165	0,022
0,8 bis unter 0,9	0,192	0,018
0,9 bis unter 1,0	0,221	0,010
über 1,0	0,000	0,000
$\sum$	1,000	1,000

Dem augenblicklichen Eigenkapital des Unternehmens in Höhe von 2 Mio DM stehen 800.000,- DM Fremdkapital gegenüber. Der Verschuldungsgrad beträgt damit:

$$\text{Verschuldungsgrad} = \frac{\text{Fremdkapital}}{\text{Eigenkapital}} = \frac{0,8}{2} = 0,4 .$$

Die obigen Daten geben dem Entscheidenden einerseits die Wahrscheinlichkeit für das Vorkommen von Konkurs bzw. Nicht-Konkurs mit: $W(K) = 0,15$ bzw. $W(\bar{K}) = 0,85$

und anderseits die Likelihoods für das Auftreten eines bestimmten Verschuldungsgrades unter der Voraussetzung von Konkurs bzw. Nicht-Konkurs: $W(V_i/K)$ bzw. $W(V_i/\bar{K})$.

Mit Hilfe des Bayesschen Theorems läßt sich jetzt die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, daß das Unternehmen bei einem bestimmten Verschuldungsgrad V_i Konkurs machen wird.

$$(6\text{-}1) \qquad W(K/V_i) = \frac{W(K) \cdot W(V_i/K)}{W(K) \cdot W(V_i/K) + W(\bar{K}) \cdot W(V_i/\bar{K})} \quad .^{1)}$$

Für den augenblicklichen Verschuldungsgrad von 0,4 ist dann die Wahrscheinlichkeit, daß die KG innerhalb der nächsten fünf Jahre Konkurs anmelden wird, wie folgt zu berechnen:

$$(6\text{-}1a) \qquad W(K/V_{0,4}) = \frac{0,015 \cdot 0,075}{0,15 \cdot 0,075 + 0,85 \cdot 0,283} = 0,0447 .$$

Durch die geplante Fremdfinanzierung ändert sich jedoch das Verhältnis von Fremdkapital zu Eigenkapital auf $0,8 + 0,6 = 1,4 : 2,0$, so daß der Verschuldungsgrad auf 0,7 steigt. Gleichzeitig steigt aber auch das Liquiditätsrisiko, gemessen durch die A-posteriori-Wahrscheinlichkeit bei einem Verschuldungsgrad von 0,7 in Zahlungsschwierigkeiten zu geraten. Diese beträgt jetzt:

$$(6\text{-}1b) \qquad W(K/V_{0,7}) = \frac{0,15 \cdot 0,165}{0,15 \cdot 0,165 + 0,85 \cdot 0,022} = 0,5696 .$$

Die Aufnahme eines neuen Kommanditisten dagegen bedeutet, daß wegen des auf $2,0 + 0,6$ Mio DM aufgestockte Eigenkapital der Verschuldungsgrad auf $2,6 : 0,8 = 0,325$ sinkt. Das damit verbundene Liquiditätsrisiko beträgt dann nach dem Bayesschen Theorem:

---

1 Schacht, der den Ansatz von Beaver kritisch würdigt, kommt zu dem Schluß, daß die Ereignisse K bzw. $\bar{K}$ und V_i bei Beaver nicht dem gleichen Ereignisraum angehören und somit auch nicht mit dem gleichen Wahrscheinlichkeitsmaß gemessen werden können. Aus diesem Grund führt Schacht in Anlehnung an Paul R. Halmos: Measure Theory. Princeton (New Jersey) · Toronto · London · New York 1950 ein sogenanntes Produktmaß ein, mit dessen Hilfe er das Zuordnungsproblem löst. Dieses Verfahren führt dazu, daß die in das Bayessche Theorem einzusetzenden Wahrscheinlichkeiten nun Ereignissen anders definierter Ereignisräume zugeordnet werden, was aber nichts an den Ergebnissen selbst ändert. Vgl. Knut Schacht: Fianzierungsregeln..., a.a.O., S. 95 - 97. Der Kritik von Schacht ist im Hinblick auf die Modellvoraussetzungen von Beaver zuzustimmen. Für unser Beispiel ist jedoch dieses Problem durch die Wahl anderer Daten umgangen worden. Denn während Beaver durch sein "paired sample design" völlig willkürlich eine A-priori-Wahrscheinlichkeit von $W(K) = W(\bar{K}) = 0,5$ unterstellt, beziehen sich die unterstellten Angaben dieses Beispiels auf sämtliche Unternehmen.

(6-1c) $$W(K/V_{0,325}) = \frac{0,15 \cdot 0,035}{0,15 \cdot 0,035 + 0,85 \cdot 0,154} = 0,0386.$$

Diese Prognose des Liquiditätsrisikos der mit den beiden Aktionen verbundenen Finanzierungsmöglichkeiten kann den Entscheidenden dazu veranlassen, trotz der damit verbundeen Nachteile die Aktion a_2 zu wählen, das heißt, den neuen Kommanditisten mit einer Einlage von 600.000,- DM in die Gesellschaft aufzunehmen; denn möglicherweise erscheint dem Geschäftsführer der KG die Wahrscheinlichkeit, bei Wahl der Aktion a_1 in Zahlungsschwierigkeiten zu geraten mit $W(K/V_{0,7}) = 0,5696$ zu hoch.

Das hier vorgestellte Verfahren zeigt, daß die Bayessche Entscheidungslehre durch die graduelle Bestimmung der finanziellen Widerstandsfähigkeit eines Unternehmens wertvolle Informationen zur Lösung des Entscheidungsproblems "Eigen- oder Fremdfinanzierung" liefern kann.[1] Die Kritik an der Bayesschen Prognose des Liquiditätsrisikos bezieht sich im wesentlichen auf die Voraussetzungen des Modells. So ist sicherlich die Prämisse der Abhängigkeit zwischen gewissen aus der Bilanzstruktur gewonnener Kennzahlen und wirtschaftlichen Erfolgt eines Unternehmens in Frage zu stellen, weil eine Bilanz ex definitione nicht den Grad der Erreichung des Liquiditätszieles wiedergeben kann.[2]

---

1 Das gleiche gilt natürlich auch vice versa für die Kreditvergabe von Geldinstituten.

2 Vgl. Knut Schacht: Finanzierungsregeln ..., a.a.O., S. 160.

Falls aber wie in unserem Beispiel empirische Untersuchungen auf eine gewisse Abhängigkeit zwischen wirtschaftlichen Erfolg und Verschuldungsgrad hinweisen, bedeutet das noch lange nicht, daß diese Abhängigkeit auch zukünftig unterstellt werden kann. Hinzu kommt, daß die Gründe, die zu Liquiditätsschwierigkeiten führen, selten allein in einem bestimmten Verschuldungsgrad liegen dürften, sondern daß vielmehr die Höhe des Verschuldungsgrades wiederum eine Folge der Ursachen des wirtschaftlichen Mißerfolgs ist. Diese Bedenken sollen aber nicht zur generellen Ablehnung der Bayesschen Prognose von Liquiditätsrisiken führen, sondern bezwecken, daß der Entscheidende bei der Anwendung dieses Verfahrens sich nicht "blind" auf die gewonnenen Ergebnisse verläßt, sondern die Prognosewerte als nur eine Größe von vielen in das Entscheidungskalkül aufnimmt.

7 DISSKUSSION DER ALLGEMEINEN KRITIKPUNKTE AN DER BAYESSCHEN ENTSCHEIDUNGSLEHRE

7-1 Der Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeiten

In wohl keinem Teilgebiet der Statistik gibt es derart gegensätzliche Meinungen wie in der Wahrscheinlichkeitstheorie bei der Definition der Wahrscheinlichkeit bezüglich ihres subjektiven oder objektiven Charakters. Wenn auch die ersten Formulierungen des subjektiven Aspekts der Wahrscheinlichkeit[1] gar nicht viel jünger sind als die Definitionen der objektiven Wahrscheinlichkeit[2], führte erst Anfang der fünfziger Jahre das Erscheinen der beiden grundlegenden Werke von Savage[3] und Good[4] zu einer offenen Kontroverse zwischen den "Subjektivisten" oder "Bayesianern"[5] und den "Objektivisten", die bis heute andauert. Ohne hier im weiteren die Argumente der Vertreter beider Richtungen im einzelnen zu diskutieren, läßt sich gegen die objektive Definition der Wahrscheinlichkeit als Grenzwert der relativen Häufigkeit folgendes einwenden:

---

1 So erschien bereits 1888 von John Venn: The Logic of Chance. London 1888 (Reprinted. New York 1963), in dem das Kapitel VI "The Subjective Side of Probability" eine durchaus brauchbare Darstellung der subjektiven Wahrscheinlichkeit wiedergibt.

2 Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit von Laplace erschien 1814. Pierre Simon de Laplace: Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1814. Erst mehr als 100 Jahre später wurde die statistische Definition der Wahrscheinlichkeit von R. von Mises als Grenzwert der relativen Häufigkeit eingeführt. Richard von Mises: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig·Wien 1931.

3 Leonard J. Savage: The Foundation of Statistics. New York·London 1954.

4 Irving J. Good: Probability and the Weighing of Evidence. London 1950.

5 Die Vertreter der subjektivistischen Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffes werden als Anhänger von Bayes auch "Bayesianer" genannt, weil sie meistens dem Bayesschen Theorem eine zentrale Stellung einräumen.

(1) Es ist nicht unmöglich, daß selbst bei einer ziemlich langen Beobachtungsreihe, die zu einer bestimmten Wahrscheinlichkeit konvergiert, sich ihre Konvergenzrichtung ändert oder divergiert.[1]

(2) Bei der Anordnung des Beobachtungsexperiments und bei der Wahl des Wahrscheinlichkeitsmodells fließen unvermeidbar subjektive Momente in die Bestimmung der "objektiven" Wahrscheinlichkeiten ein.[2]

(3) Eine Anwendung auf einmalige Ereignisse oder Situationen, die sich nur wenige Male wiederholen, ist unmöglich.[3]

(4) Die empirisch ermittelten Häufigkeiten sind generell vergangenheitsbezogen, wogegen ihr Verwendungszweck in der Regel zukunftsbezogen ist.

Besonders im Bereich der Wirtschafts- und Sozialwissenschaften kommen Problemsituationen einmaliger Natur häufiger vor und außerdem sind Experimente dort im Gegensatz zu den Naturwissenschaften meistens gar nicht oder höchstens in Form von Simulationsmodellen durchführbar. Damit bedeutet ein Festhalten am Konzept der relativen Häufigkeit, daß bei einem großen Teil betriebswirtschaftlicher Entscheidungssituationen die auf "objektiven" Wahrscheinlichkeiten basierenden Verfahren der statistischen Entscheidungstheorie nicht anwendbar sind. Außerdem hat diese Haltung zur Folge, daß die Erfahrungen, das Wissen und die Informationen, die nicht den Charakter von relativen Häufigkeiten haben, in einem Entscheidungskalkül nicht explizit berücksichtigt werden können.

---

1 Vgl. Wilhelm Krelle: Präferenz- und Entscheidungstheorie. Unter Mitarbeit von D. Coenen. Tübingen 1968, S. 197.

2 Vgl. u.a. J. L. Hodges, Jr. and E. L. Lehmann: Basic Concepts of Probability and Statistics. San Francisco · London · Amsterdam 1964, S. 114.

3 Trotzdem wurde in der Vergangenheit das Konzept der relativen Häufigkeit unter recht schwachen Begründungen auch für einmalige Ereignisse verwendet. Solche Argumente sind z. B.: (a) Von einmaligen Ereignissen wird angenommen, daß sie sich häufiger wiederholt hätten. (b) Man definiert die relative Häufigkeit einfach als subjektive Wahrscheinlichkeit. Vgl. dazu William T. Morris: Management Science in Aktion. Homewood (Illinois) 1963, S. 271 f.

Somit bleibt kein anderer Ausweg, als eine subjektive Interpretation des Wahrscheinlichkeitsbegriffs zuzulassen. Andernfalls bliebe nur die Möglichkeit, die jedem Entscheidungsproblem immanente Unsicherheit zu ignorieren und stattdessen unter der Annahme sicherer Erwartungen oder völligen Unwissens zu operieren.[1]

Da das Fehlen von wirklich objektiven Wahrscheinlichkeiten in den Wirtschafts- und Sozialwissenschaften den Ansatz von subjektiven Wahrscheinlichkeiten empfiehlt, erhebt sich jetzt die Frage nach dem Begriffsinhalt des subjektiven Konzepts der Wahrscheinlichkeit. Hier stehen sich ebenfalls zwei Ansichten gegenüber: die intuitive und die entscheidungsorientierte Konzeption.[2] Da die intuitive Sicht jegliches subjektive Gefühl als Wahrscheinlichkeit gelten läßt, erscheint sie als Grundlage zum Treffen von rationalen wirtschaftlichen Entscheidungen wenig brauchbar. Das entscheidungsorientierte Konzept hingegen verlangt die Beurteilung zukünftiger Zustände oder Ereignisse aus der Entscheidungssituation in logisch und rational zu begründender Weise.

Um zu vermeiden, daß subjektive Wahrscheinlichkeiten unkontrollierbare Ausflüsse der Phantasie und Vorstellungskraft beinhalten, ist es wichtig, die subjektive Komponente durch gewisse Regeln zu präzisieren. Ohne auf die Versuche in der Literatur, ein System aus Postulaten für die subjektive Wahrscheinlichkeit aufzubauen,[3] näher einzugehen, wird hier verlangt, daß

---

1 Vgl. Jürgen Wild: Unternehmerische Entscheidungen, Prognosen und Wahrscheinlichkeit. In: ZfB, 39. Jg. (1969), S. 85.

2 Als Vertreter der intuitiven Sicht der Wahrscheinlichkeit gelten Bernard O. Koopman: The Axioms and Algebra of Intuitive Probability. In: Annals of Mathematics. Vol 41 (1940), S. 269 - 292 und Irving J. Good: Probability..., a.a.O. Als Begründer der entscheidungsorientierten Konzeption der Wahrscheinlichkeit gelten Leonard J. Savage: Foundations ..., a.a.O. und Frank P. Ramsey: Truth and Probability (1926) and Further Considerations (1928). In: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. Ed. Braithwaithe. London · New York 1931.

3 Das erste vollständige axiomatische System der subjektiven Wahrscheinlichkeit wurde formuliert von Leonard J. Savage: Foundations ..., a.a.O.

die Wahrscheinlichkeitsurteile einer Person der Forderung nach Konsistenz und Kohärenz genügen.[1] Dabei gewährleistet die Forderung nach Konsistenz, daß die subjektiv gewonnenen Wahrscheinlichkeiten den Gesetzen der Logik gehorchen. Durch das Postulat der Kohärenz erreicht man, daß die subjektiven Wahrscheinlichkeiten im Einklang mit dem Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitstheorie stehen. Das bedeutet:

(1) Die subjektive Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Ereignis A kann nur Werte zwischen 0 und 1 annehmen, wobei der Wahrscheinlichkeit für ein sicheres Ereignis der Wert 1 bzw. einem unmöglichen Ereignis der Wert 0 zuzuordnen ist.

(2) Hält man zwei Ereignisse A und B für gleich wahrscheinlich, ist ihnen die gleiche numerische Wahrscheinlichkeit beizumessen.

(3) Besteht ein Ereignisraum aus mehreren Ereignissen A_i, die sich gegenseitig ausschließen und den Ereignisraum erschöpfend darstellen, muß die Summe dieser Wahrscheinlichkeiten gleich eins sein.

(4) Die subjektiven Wahrscheinlichkeiten müssen den Rechenregeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehorchen. Das bedeutet, der Multiplikationssatz für abhängige und für unabhängige Ereignisse und der Additionssatz für sich gegenseitig ausschließende bzw. sich gegenseitig nicht ausschließende Ereignisse muß anwendbar sein.

---

1 Vgl. u.a. Leonard J. Savage: Foundations ..., a.a.O., S. 56: "..., because the personalistic view itself insists that probability is concerned with consistent action in the face of uncertainty." Irving J. Good: The Estimation of Probabilities: An Essay on Modern Bayesian Methods. Research Monograph No. 30 by M.I.T. Press. Cambridge (Massachusetts) 1968 S.7: "It has been proved that a consistent set of probabilities obeys the usual actions of probability." Ähnlich äußert sich Irving H. LaValle: An Introduction to Probability, Decision and Inference. New York · London · Sydney 1970, S. 457.

(5) Aus den Regeln der Logik ergibt sich zudem, daß eine Person, die ein bestimmtes Ereignis A für wahrscheinlicher hält als ein beliebiges Ereignis B, der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A einen höheren numerischen Wert zuordnen muß, als der Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B.

Damit lassen sich kohärente und konsistente subjektive Wahrscheinlichkeiten durchaus als rationale Wahrscheinlichkeiten betrachten. Es ist aber stets zu berücksichtigen, daß die Beurteilung der Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses von Person zu Person unterschiedlich sein kann, weil sich kein Kriterium dafür aufstellen läßt, wie groß die subjektive Wahrscheinlichkeit unter gegebenen Bedingungen sein muß.[1] Diese möglichen Wahrscheinlichkeitsdifferenzen dürften aber im wesentlichen auf Unterschiede in den Erfahrungen und in der Urteilsfähigkeit des betreffenden Individuums zurückzuführen sein.[2] Zwar beeinflussen sicherlich auch die Charaktereigenschaften und eine optimistische oder pessimistische Grundeinstellung des Schätzenden die absolute Höhe der subjektiven Wahrscheinlichkeit, jedoch dürften bei Beachtung der Forderung nach Konsistenz und Kohärenz diese Einflüsse nicht mehr so bedeutsam sein. Daraus läßt sich ableiten, daß zwei Personen, die über die gleiche Art des analytischen Denkens verfügen und auf den gleichen Erfahrungsschatz zurückgreifen können, einem bestimmten Ereignis A annähernd die gleiche Wahrscheinlichkeit zuordnen werden.[3]

---

1 Vgl. u.a. Leonard J. Savage: Foundations ..., a.a.O., S. 67. Jürgen Wild: Unternehmerische Entscheidungen..., a.a.O., S. 86. J. L. Hodges, Jr. and E. L. Lehmann: Basic Concepts ..., a.a.O., S. 114.

2 Vgl. William T. Morris: Management science..., a.a.O., S. 280.

3 Vgl. George Hadley: Decision Theory..., a.a.O., S. 12.

Nach der Begründung für den Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeiten und der Klärung ihres Begriffsinhalts erhebt sich nun die Frage nach ihrer Messung.[1] Wenn auch bei einigen Beispielen der vorstehenden Kapitel explizit auf dieses Problem eingegangen wurde,[2] soll diese Frage hier allgemein und nicht anhand des Sonderfalles eines Beispiels diskutiert werden. Bei der Ermittlung von numerischen Werten für den Grad des Glaubens oder der Überzeugung einer bestimmten Person muß man einen gewissen Mangel an Präzision in Kauf nehmen.[3] So hat es sicherlich wenig Sinn, zwischen subjektiven Wahrscheinlichkeiten zu unterscheiden, die nur wenig auseinanderliegen wie z.B. 0,20 und 0,22, wohl aber zwischen solchen, die ganz unterschiedliche Glaubwürdigkeiten wie z.B. 0,2 und 0,5 ausdrücken.[4]

Die meisten Vorschläge in der Literatur gehen dahin, durch Wetten[5] oder Aussetzen von Preisen[6] und Wählenlassen zwischen Ereignissen mit unbekannten Eintrittsereignissen eine numerische Bestimmung der subjektiven Wahrscheinlichkeiten vorzunehmen. Diese Möglichkeit sei anhand des folgenden Beispiels näher erläutert: Dazu sei unterstellt, daß eine Person dem Ereignis "Steigerung des Umsatzes" subjektive Wahrscheinlichkeiten zuordnen soll. Dazu stellt man ihn vor die Wahl, eine bestimmte Geldsumme (z.B. 100,- DM) zu erhalten, wenn entweder die Um-

---

1 Allerdings haben viele Analysen der unternehmerischen Erwartungen ergeben, daß die Unternehmer die Zukunft oft erstaunlich schlecht prognostizieren können. Vgl. Dazu Horst Albach: Die Prognose im Rahmen unternehmerischer Entscheidungen. In: Diagnose und Prognose wirtschaftswissenschaftlicher Methodenprobleme. Hrsg. H. Giersch und K. Borchardt. Berlin 1962, S. 201 und die dort zitierte Literatur.

2 Vgl. dazu Abschnitt 3-3, S. 54 ff. und Abschnitt 4-2, S. 93 ff.

3 Vgl. u.a. George Hadley: Decision Theory..., a.a.O., S. 12. Leonard J. Savage: Foundations..., a.a.O., S. 59.

4 Vgl. Wilhelm Krelle: Entscheidungstheorie..., a.a.O., S. 198.

5 Vgl. William Feller: Probability and Profit. A Study of Economic Behavior along Bayesian Lines. Homewood 1965, S. 203.

6 Vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making..., a.a.O., S. 279.

satzsteigerung eintritt oder, wenn er aus einer Urne, die neun weiße und eine rote Kugel enthält, die rote Kugel zieht. Falls der Betreffende es vorzieht, lieber der Urne keine Kugel zu entnehmen, erachtet er offensichtlich die Wahrscheinlichkeit der Umsatzsteigerung höher als 0,1. Jetzt verändert man des Verhältnis der Kuglen in der Urne auf vier rote und sechs weiße Kugeln. Möchte der Betreffende jetzt lieber eine Kugel ziehen, liegt die Wahrscheinlichkeit für die Umstzsteigerung für diese Person anscheinend zwischen 0,1 und 0,4. Durch weitere Veränderungen der Zusammensetzung des Urneninhalts läßt sich dann schrittweise der Bereich der subjektiven Wahrscheinlichkeit einengen, bis die "Schwelle der Fühlbarkeit" erreicht ist.[1]

Gegen alle in der Literatur gemachten Vorschläge, durch Lotterien, Wetten oder ähnliche hypothetischen Experimente, subjektive Wahrscheinlichkeiten numerisch zu bestimmen, lassen sich folgende Argumente vorbringen:

(1) Das Interesse des Entscheidenden wird von der eigentlichen Entscheidungssituation auf die Wette gelenkt.

(2) Die persönliche Risikoneigung und eventuelle Freude am Spiel lassen sich nicht eliminieren.[2]

(3) Die Einschätzung des Geldwertes spielt eine nicht unwesentliche Rolle.

(4) Die Experimente sind meistens mit einem hohen Aufwand an Zeit und Kosten verbunden.[3]

---

1 Wilhelm Krelle: Entscheidungstheorie ..., a.a.O., S. 205

2 Savage weist darauf hin, daß eigentlich die Risikoneigung bei subjektiven Wahrscheinlichkeiten keine Rolle spielen dürfte, trotzdem aber berücksichtigt werden müßte. "... but I Think it is clear from the formal definition of qualitative probability that the particular personalistic view sponsored here does not leave room for optimism and pessimism, however these traits be interpreted to play any role in the person's judgment of probabilities." Leonard J. Savage: Foundations ..., a.a.O., S. 68

3 Vgl. Leonard J. Savage: Foundations..., a.a.O., S. 29.

Von diesen Argumenten erscheint der letzte Punkt der wichtigste gegen eine praktische Anwendung bei realen betriebswirtschaftlichen Entscheidungssituationen zu sein.

Indes besteht die Schwierigkeit der Ermittlung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten vor allem darin, mit dem Begriff und den Regeln der Wahrscheinlichkeitstheorie nicht vertraute Personen dazu zu bewegen, ihre Mutmaßungen numerisch auszudrücken. Es ist allerdings zu beobachten, daß die meisten Leute in der Lage sind, verbal den Grad ihrer Gewißheit über zukünftige Ereignisse auszudrücken, indem sie Wörter wie z.B. möglich, wahrscheinlich oder meistens gebrauchen. Wenn zwischen der allgemeinen Wortwahl zur Bezeichnung eines unsicheren Ereignisses und dem numerischen Wert der subjektiven Wahrscheinlichkeit für das gleiche Ereignis ein Zusammenhang besteht, würde das bedeuten, daß eine Person, die das Eintreffen eines zukünftigen Ereignisses für z.B. ziemlich sicher hält, durch die Wortwahl dieser Eintrittswahrscheinlichkeit einen höheren numerischen Wert beimißt, als wenn sie z.B. das Wort möglicherweise gebraucht hätte. Unter diesen Voraussetzungen könnte man dem allgemeinen Sprachgefühl entsprechend die Ausdrücke zur Bezeichnung ungewisser Ereignisse in eine Rangfolge bezogen auf den Grad der Unsicherheit bringen und ihnen numerische Werte oder Intervalle zwischen Null und eins zuordnen. Damit könnte dann das Problem gelöst werden, daß viele Personen zwar wohl über das Eintreffen unsicherer Ereignisse eine relativ genaue Vorstellung haben, diese aber nicht quantifizieren können, sondern nur verbal auszudrücken vermögen. Zunächst müßte dann der Entscheidende anhand einer solchen Aufstellung oder Tabelle prüfen, ob sein Sprachgefühl mit dem der Allgemeinheit übereinstimmt. Ist das der Fall, kann er zur Quantifizierung seiner subjektiven Wahrscheinlichkeit zunächst den Grad seiner Gewißheit verbal formulieren und dann anhand dieser Tabelle den dazu gehörigen numerischen Wert ablesen. Falls eine solche Tabelle nicht dem Sprachgefühl des Betreffenden entspricht, kann sie vielleicht als Orientierungshilfe zur Aufstellung einer individuellen Tabelle dienen.

Tabelle 7-1

Zuordnung numerischer Werte zu Wahrscheinlichkeitsausdrücken

subjektives Urteil in verbaler Form	numerische Zuordnung	Anteil der Schätzenden
nie undenkbar keinesfalls ausgeschlossen völlig unmöglich	0 bis 0,05	0,93
außerordentlich unwahrscheinlich	0,02 bis 0,06	0,88
recht oder sehr unwahrscheinlich	0,04 bis 0,10	0,82
unwahrscheinlich	0,05 bis 0,15	0,74
vielleicht möglicherweise denkbar unter Umständen unsicher	0,20 bis 0,50	0,89
glauben annehmen wahrscheinlich	0,30 bis 0,60	0,96
sehr oder durchaus möglich ziemlich sicher recht wahscheinlich häufig	0,50 bis 0,80	0,79
sehr wahrscheinlich meistens in der Regel	0,70 bis 0,90	0,83
fest glauben außerordentlich wahrscheinlich mit Sicherheit	0,90 bis 1,00	0,77
mit absoluter Sicherheit völlig sicher	0,95 bis 1,00	0,92

Voraussetzung eines erfolgreichen Arbeitens mit solchen Aufstellungen ist jedoch, daß der Entscheidende mit den Grundbegriffen der Wahrscheinlichkeitstheorie vertraut ist und zudem in der Lage ist, sich präzise auszudrücken.

Zur Überprüfung dieser Möglichkeit, solche Tabellen aufzustellen und zur Klärung der Frage, ob bestimmte Ausdrücke einer bestimmten numerischen Wahrscheinlichkeit allgemein zugeordnet werden, haben wir 200 Personen, die alle über die Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie als Studenten des Fachbereichs "Wirtschafts- und Sozialwissenschaften" der Westfälischen Wilhelms-Universität zu Münster informiert waren, eine Liste mit dreißig willkürlich aneinander gereihten Wahrscheinlichkeitsausdrücken vorgelegt und darum gebeten, diese zu ordnen und ihnen ein Maß zwischen 0 und 1 zuzuordnen. Das Ergebnis dieses Experiments ist in der nebenstehenden Tabelle 7-1 wiedergegeben.[1] Die Tabelle zeigt in der ersten Spalte die Wahrscheinlichkeitsausdrücke, denen ein in der dritten Spalte angegebener Anteil der Testpersonen die numerischen Wahrscheinlichkeiten der zweiten Spalte zugeordnet hatte. Da häufig zu mehreren Wörtern derselbe oder eng beieinander liegende Werte angegeben wurden, sind die Wörter, denen annähernd die gleiche numerische Wahrscheinlichkeit zugeteilt wurde, in Gruppen zusammengefaßt worden. Diesen Wortgruppen wurde dann ein Wahrscheinlichkeitsintervall zugeordnet, in den ein möglichst großer Anteil der Schätzungen fiel. Die restlichen über dieses Intervall hinausgehenden Werte bleiben unberücksichtigt, so daß der Anteil der Schätzenden (Spalte 3) zwischen 74% und 96% schwankt.

---

1 Andere Experimente zur Schätzung von Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe von Wetten oder den hypothetischen Kauf von Informationen haben ergeben, daß Personen recht gut in der Lage sind, Wahrscheinlichkeiten zu schätzen. Meistens ergaben sich dabei jedoch Überschätzungen niedriger Wahrscheinlichkeiten oder wünschenswerter Ereignisse und vice versa ein Unterschätzen. Vgl. Amos Tversky: Additivity, Utility and Subjective Probability. In: Decision Making. Selected Readings. Ed. W. Edwards and A. Tversky. Baltimore-Ringwood (Victoria) 1967, S. 208 - 237. Paul E. Green, Michael H. Halbert and Patrick J. Robinson: An Experiment in Probability Estimation. In: Journal of Marketing, Vol. II (1965), S. 266 -273. L. D. Phillips and Ward Edwards: Conservatism in a Simple Probability Inference Task. In: Decision Making... s.o., S. 239 ff.

Die Tabelle 7-1 zeigt recht deutlich, daß zwischen der Wortwahl - zumindest wenn sie rational erfolgt - und der numerischen Höhe der subjektiven Einschätzung von Ereignissen ein Zusammenhang besteht, den man in der oben beschriebenen Weise für Personen, die ihre Mutmaßungen leichter verbal ausdrücken können, zur numerischen Bestimmung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten nutzbar machen könnte. Den Nachteil der zum Teil erheblichen Intervallbreiten könnte man dadurch umgehen, daß man die Klassenmitte als numerischen Wert der subjektiven Wahrscheinlichkeit wählt. Durch einen Vergleich der Wortwahl mit der numerischen Höhe der dazu gehörenden Wahrscheinlichkeit, kann der Entscheidende auch feststellen, ob die Höhe auch tatsächlich den Grad seiner Überzeugung ausdrückt.

In der Diskussion um die Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten wurde bisher davon ausgegangen, daß der Entscheidende den Prozeß der Gewinnung subjektiver Wahrscheinlichkeiten gar nicht bewußt miterlebt, sondern daß sich dieser Prozeß mehr oder weniger unbewußt durch die Aufnahme irgendwelcher Informationen vollzieht. Dieser Aspekt wird in der Literatur weitgehend nicht beachtet, es sei denn, es handelt sich um die Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten bei Spielsituationen wie z.B. beim Würfeln oder Werfen einer Münze. Dabei wird ausdrücklich daraufhin gewiesen, daß der Entscheidende erst nach eingehender Inspektion des Würfels oder der Münze die subjektiven Wahrscheinlichkeiten bestimmt. Ansonsten beschränkt man sich darauf, den Entscheidenden als Träger latent vorhandener Informationen und subjektiver Wahrscheinlichkeiten zu betrachten, die nur - ähnlich wie bei einer Datenverarbeitungsanlage - abgerufen zu werden brauchen. Wenn wir auch der Meinung sind, daß der Entscheidende bereits bei der Aufstellung eines Entscheidungskalküls über ein mehr oder weniger vages Maß an Überzeugung verfügt, so sollte dieses allein jedoch nicht Grundlage seiner Entscheidung sein. Vielmehr dürfte es in jedem Fall an-

gebracht sein, eine genaue Aufstellung der auf das Ereignis einwirkenden Faktoren vorzunehmen. Diese Faktoren sollten dann hinsichtlich ihrer möglichen Einflußnahme auf des Ereignis analysiert werden.[1] Gegebenenfalls sind relative Häufigkeiten ähnlicher Problemsituationen der Vergangenheit als Anhaltspunkte zu gebrauchen, oder man beschafft sich zusätzliche Informationen von Experten, wenn der eigene Wissenstand zur Analyse der Einflußfaktoren nicht ausreicht.[2] An die Analyse der Einflußfaktoren sollte sich ein gedankliches Experiment anschließen, in dem der Entscheidende die zur Beurteilung anstehende Situation möglichst oft durchspielt und die dabei entstehenden relativen Häufigkeiten abschätzt.[3]

Bei dieser Vorgehensweise zur Gewinnung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten dürften aufwendige Verfahren wie z.B. die weiter oben dargestellten Lotterien oder Wetten zur numerischen Bestimmung von Mutmaßungen gar nicht mehr erforderlich sein; denn es ist anzunehmen, daß ein Entscheidender, der mit den Postulaten der Konsistenz und Kohärenz vertraut ist, allein aufgrund der rationalen Durchdringung der Situation ohne Umweg direkt den Grad seiner Überzeugung numerisch ausdrükken kann. Allerdings gilt auch hier, daß dazu eine gewisse Übung

---

1 Vielleicht lassen sich hier die Verfahren der statistischen Faktorenanalyse sinnvoll einsetzen, wenn auch ein entsprechender Hinweis oder ein Beispiel dafür nicht gefunden werden konnte. Zur Faktorenanalyse vgl. u.a. R. J. Rummel: Understanding factor analysis. In: The Journal of Conflict Resolution. A Quaterly for Research Related to War and Peace. Vol. XI (1967), S. 444 - 480.

2 Diese Meinung vertreten auch u.a. Ward Edwards, Harold Lindman and Leonard J. Savage: Bayesian Statistical Inference for Psychological Research. In: Psychological Review, Vol 70 (1963), S. 208 f.

3 Vgl. dazu Wilhelm Krelle: Entscheidungstheorien..., a.a. O., S. 200, der hier das Beispiel die Bestimmung der Wahrscheinlichkeit für das Gewinnen einer Schlacht bringt. "Der General wird alle Faktoren, ..., einzeln in Erwägung ziehen, also etwa die gegenseitige Truppenstärke, die Artillerie- und Panzerzahl, ... Keiner dieser Faktoren ist in seinen Auswirkungen sicher; ... und jede Möglichkeit muß in Betracht gezogen werden."

notwendig ist.[1] Eine Einschränkung ist dabei jedoch zu beachten: Kann das Ereignis, dessen Eintrittswahrscheinlichkeit es zu bestimmen gilt, in sehr vielen Ausprägungen (so z.B. die möglichen Fehlerquoten unseres Beispiels aus dem Revisionswesen im Abschnitt 3-3) vorkommen, wird eine numerische Zuordnung für jede einzelne Ausprägung der Zufallsvariablen nicht mehr möglich sein. Meistens ist jedoch in diesen Fällen das Verfahren der Zuordnung aber dadurch zu vereinfachen, daß man eine kontinuierliche Wahrscheinlichkeitsverteilung unterstellt, für die lediglich der Mittelwert und die Varianz zu bestimmen ist.[2]

In der Erörterung um den Prozeß der Gewinnung subjektiver Wahrscheinlichkeiten bietet es sich an, die Prämisse, bei dem Entscheidenden handele es sich um eine Einzelperson, fallenzulassen, da diese Prämisse immer mehr im Widerspruch zur betriebswirtschaftlichen Praxis steht, in der sich langsam die Idee des "team-work" durchzusetzen beginnt. Jedoch soll hier nicht eine Diskussion der komplexen Probleme von Gruppenentscheidungen folgen,[3] sondern lediglich auf die Möglichkeiten zur Gewinnung von subjektiven Wahrscheinlichkeitsurteilen durch Gruppenurteile hingewiesen werden. Hier bieten sich drei Methoden an:

(1) Die Gruppendiskussion ("brain-storming"):
Das anstehende Problem wird in freier Diskussion analysiert.

(2) Die Gruppenbefragung:
Hier bildet sich der Entscheidende nach der Befragung einer Gruppe von Experten allein sein Urteil.

---

1 "With practise a decision maker may be able to assign probabilities directly, giving us statements of the form: !I believe that there is a 30 per cent chance of winnin this contract, ! and so on." William T. Morris: Management Science: A Bayesian Introduction. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968, S. 27.

2 Vgl. das Beispiel zur Einführung des Videorecorders, S. ff.

3 Zu Gruppenentscheidungen vgl. u.a. Howard Raiffa: Decision Analysis. Introductory Lectures on Choices under Uncertainty. 2nd. printing. Reading (Massachusetts) · Menlo Park (California) · London · Don Mills (Ontario) 1970, S. 188 ff. William T. Morris: Bayesian Introduction..., a.a.O., S. 13 ff.

(3) Die strukturierte Gruppenbefragung ('Delphi-Methode'): Eine Gruppe von Experten wird unabhängig voneinander über mehrere Runden befragt, wobei jeweils der Ergebnismittelwert der einzelnen Runden zu Beginn der neuen Runde der Gruppe mitgeteilt wird.[1]

Der Vorteil dieser Art der Wahrscheinlichkeitsermittlung ist: im Durchschnitt genauere und richtigere subjektive Wahrscheinlichkeiten. Das wird klar, wenn man bedenkt, daß eine Gruppe von Fachleuten meistens über mehr Informationen verfügt als eine Einzelperson. Hinzu kommt, daß durch eine Diskussion die falschen Informationen der einzelnen Gruppenmitglieder größtenteils herausgefiltert werden und schwach vorhandene richtige Inormationen verstärkt werden.

Die Diskussion dürfte bisher gezeigt haben, daß der Ansatz von subjektiven Wahrscheinlichkeiten zur Lösung von Entscheidungsproblemen unter Unsicherheit mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre nicht nur notwendig, sondern bei Beachtung gewisser hier dargestellter Kriterien auch sinnvoll ist. Berücksichtigt man außerdem, daß die Bayessche Entscheidungslehre bei der Beurteilung der meisten Entscheidungssituationen gar nicht die subjektiven A-priori-Wahrscheinlichkeiten, sondern die mit Hilfe des Bayesschen Theorems "objektivierten" A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ansetzt, dürfte damit das Hauptargument der Kritiker der Bayesschen Entscheidungslehre hinfällig geworden sein.

---

1 Zur Delphi-Methode vgl. Horst Albach: Informationsgewinnung durch strukturierte Gruppenbefragung. Die Delphi-Methode. In: ZfB, 40. Jg. (1970) (Ergänzungsheft), S. 11 - 26.

7-2 Die Verwendung des Geldwertes als Nutzenmaß

Ebenso wie die moderne Nutzentheorie weisen die Vertreter der Bayesschen Entscheidungslehre die Bindung des Nutzens an das Geld weitgehend zurück.[1] Dieser Standpunkt wird klar, wenn man danach fragt, ob ein Gewinn von 2 Mio DM einem Unternehmer doppelt soviel Nutzen bringt wie ein Gewinn von nur 1 Mio DM. Stattdessen wird der Nutzen auf den Entscheidenden bezogen und nur für diesen als gültig betrachtet.[2] Zur Bestimmung des Nutzens schlägt man dem Entscheidenden hypothetische Lotterien vor, denen der Entscheidende unterschiedliche Geldbeträge zuordnet.[3] Daraus lassen sich sogenannte Nutzenindizes ableiten, mit denen die in Geldeinheiten ausgedrückten Ergebnisse der möglichen Aktionen in Nutzengrößen umgeformt werden. Diese werden dann im weiteren Entscheidungskalkül so behandelt wie die ursprünglichen Gewinne oder Verluste. In diesem Abschnitt soll jedoch im weiteren nicht auf eine ausführliche Ableitung von Nutzenindizes eingegangen werden, sondern lediglich die Vor- und Nachteile der Verwendung von Geldwerten im Gegensatz zu Nutzengrößen diskutiert werden.

Grundsätzlich lassen sich drei unterschiedliche Nutzenfunktionen unterscheiden, die die Haltung des Entscheidenden gegenüber dem Risiko, dem Ertrag und dem Verlust der möglichen Entscheidungskonsequenzen wiedergeben. Diese seien an dem folgenden Beispiel erläutert: Drei Personen mit unterschiedlicher Risikoneigung wird

---

1 Vgl. dazu die Ausführungen von John von Neumann und Oskar Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior. 2nd. revised ed. Princeton New Jersey) 1947. Leonard J. Savage: Foundations..., a.a.O. John W. Pratt et al: Decision Theory ..., a.a.O. Bei den beiden letzteren Autoren findet man eine ausführliche axiomatische Verknüpfung von subjektiver Nutzen- und Wahrscheinlichkeitstheorie.

2 Vgl. Günter Menges: Grundmodelle..., a.a.O., S. 38 ff.

3 Vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 320 ff.

ein Geschäft vorgeschlagen, das ihnen mit unterschiedlicher Wahrscheinlichkeit einen Gewinn in Höhe von 10.000,- DM bzw. einen Verlust in der gleichen Höhe bringen kann. Diese drei Personen A, B und C werden jetzt danach befragt, welchen sicheren Geldbetrag sie jeweils den einzelnen Erwartungswerten der Gewinne oder Verluste vorziehen würden. Als Ergebnis dieser Befragung könnte man sich die Daten der folgenden Tabelle 7-2 vorstellen.

Tabelle 7-2
Ableitung von Nutzenwerten unterschiedlich sicherer Geldbeträge

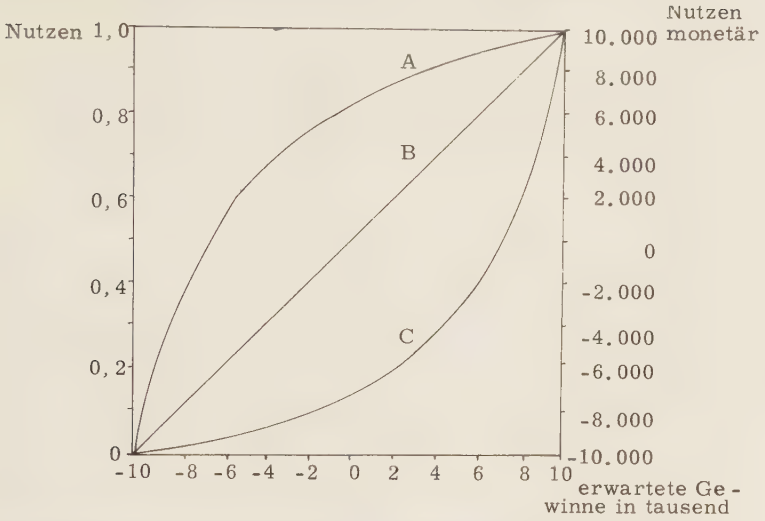
Wahrscheinlichkeit für Gewinn von DM 10.000,-	sichere Geldbeträge, die nebenstehen Erwartungswerten gleichgeordnet sind		
	A	B	C
0,75	-3.000	+5.000	+9.000
0,50	-7.000	± 0	+7.000
0,25	-9.000	-5.000	+3.000

Aus den Daten der Tabelle 7-2 lassen sich die Nutzenfunktionen der folgenden Abbildung aufstellen. Diese zeigt für die drei Personen A, B und C deren Einstellung zum Risiko und Geldwert. Dabei zeigt sich, daß die Person A sich extrem risikoscheu verhält, während die Person C eine ausgesprochene Risikovorliebe zeigt. Für beide Personen dürfte der Geldwert kein äquivalentes Nutzenmaß sein; wohl aber für die Person B, die ihre Nutzenfunktion als linear abhängig zur Menge des Geldes betrachtet und sich absolut risikoneutral verhält.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die in dieser Untersuchung unterstellte Prämisse - der Entscheidende mißt den möglichen Konsequenzen seiner Aktionen einen Nutzen bei, der sich äquivalent zu den möglichen Gewinen oder Verlusten verhält - lediglich ein Spezialfall ist, dessen Verwendung bei praktischen Entscheidungsproblemen jedoch im Hinblick auf andere mögliche Nutzenbewertungen nicht unproblematisch ist. Dies möge an den folgenzwei Beispielen erläutert werden: Es sei angenommen, daß die

Abbildung 7-1

Nutzenfunktionen bei unterschiedlicher Risikoneigung



Geschäftsführung eines Transportunternehmens vor der Frage steht, ob sie einen LKW mit einem Wert von 100.000,- DM gegen Diebstahl bei einer Jahresprämie von 300,- DM versichern soll. Die Wahrscheinlichkeit eines Diebstahls beträgt nach den Erhebungen der Kriminalpolizei 0,1%. Das heißt, daß der erwartete Verlust des Nicht-Versicherns 100,- DM gegenüber dem sicheren Verlust von 300,- DM bei Abschluß der Versicherung beträgt. Trotzdem wird die Geschäftsführung sich für den Abschluß der Versicherung entscheiden, weil sie sicherlich den, wenn auch nur mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit zu erwartenden Verlust von 100,000,- DM als schmerzhafter empfinden wird als den sicheren Verlust von 300,- DM.

Das nächste Beispiel zeigt eine ähnliche, aber durchaus in der Praxis vorherrschende Verhaltensweise. Hier möge ein Betrieb die Möglichkeit haben, eine schadhafte Produktionsanlage entweder mit einem Kostenaufwand von 50.000,- DM zu reparieren oder für 300.000,- DM eine neue Anlage zu kaufen. Bei Repara-

tur besteht eine 1%ige Wahrscheinlichkeit dafür, daß die Anlage trotzdem ausfällt, was eine Produktionsunterbrechung mit Kosten in Höhe von 7 Mio DM verursachen wird. Damit beträgt der erwartete Verlust der Reparatur: 50.000 + 0,1 · 7.000.000 = 120.000,- DM gegenüber einem sicheren Verlust von 300.000,- DM bei Erneuerung der Anlage. Bei einer solchen Entscheidung wird die Betriebsleitung sich ziemlich sicher für eine Neuanschaffung entscheiden.

Beide Beispiele zeigen, daß der Geldwert in Fällen, in denen unter Umständen der Bestand des Unternehmens durch Zahlungsschwierigkeiten ernsthaft gefährdet ist, sicher nicht als Nutzenmaß brauchbar ist. Vielmehr sind solche Entscheidungen immer unter Beachtung der möglichen Auswirkungen auf die Liquidität zu treffen. Von diesen Extremfällen abgesehen erweist sich jedoch der Geldwert als operationales Kriterium zur Beurteilung von betriebswirtschaftlichen Entscheidungskonsequenzen. Das gilt vor allem deshalb, weil sich gegen die Vorschläge, Entscheidungen anhand von Nutzenfunktionen, folgende Einwände erheben lassen:[1]

(1) Häufig sind der Entscheidende und der bzw. die Kapitaleigner nicht identisch. Damit fallen aber auch ihre Nutzenfunktionen auseinander, so daß die Möglichkeit der intersubjektiven Nachprüfbarkeit der Maßnahmen der Geschäftsführung nicht gegeben ist.[2]

(2) Bei Team-Entscheidungen ist wegen der unterschiedlichen Nutzenbewertung nur schwer Einigkeit zu erzielen.

---

1 Vgl. Bruce W. Morgan: Decision Processes ..., a.a.O., S. 41 ff.

2 Dieser Einwand könnte auch gegen die Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten erhoben werden. Jedoch sind wir gerade der Meinung, daß bei Offenlegung aller Einflußgrößen und ihrer geschätzten Auswirkungen eine bessere Nachprüfbarkeit gegeben ist.

(3) Die Nutzenbewertungen bezüglich des Vermögens des Unternehmens dürften kaum mit den persönlichen Nutzenfunktionen von Führungskräften übereinstimmen.[1]

(4) Bei betriebswirtschaftlichen Entscheidungen der Praxis dürften in den meisten Fällen die zusätzlichen Kosten und Mühen der Aufstellung von Nutzenfunktionen ökonomisch nicht zu rechtfertigen sein.[2]

Damit bleibt festzuhalten, daß man in allen Fällen, in denen die schlechteste aller Konsquenzen nicht zu schlecht und das beste aller Ergebnisse nicht zu gut[3] ist, den Geldwert als zulässige Approximation des Nutzens ansehen sollte.[4] Mittels eines simplen Tests läßt sich außerdem in Zweifelsfällen die Zulässigkeit dieser Approximation überprüfen: Man stellt den Entscheidenden vor die Wahl, ob es ihm lieber ist, den monetären Erwartungswert der schlechtesten (oder besten) aller möglichen Konsequenzen seiner Aktionen zu erhalten oder stattdessen eine sichere Geldsumme in der gleichen Höhe auszugeben (oder einzunehmen). Verhält sich der Entscheidende gegenüber beiden Alternativen indifferent, dürfte der Geldwert für das betreffende Entscheidungsproblem ein passendes Nutzenmaß darstellen.

---

1 Vgl. Hans Schneeweiß: Entscheidungskriterien ..., a.a.O., S. 81.

2 Vgl. u.a. Robert Schlaifer: Probability and Statistics ..., a.a.O., S. 28 ff. William T. Morris: Bayesian Introduction ..., a.a.O., S. 45 f. George Hadley: Decision Theory ..., a.a.O., S. 123.

3 Es gibt (Glücksspiel-) Situationen, deren Gewinnerwartungen unendlich groß sind, wie z.B. das St. Petersburger Spiel. Vgl. dazu Günter Menges: Grundmodelle ..., a.a.O., S. 15 ff.

4 Vgl. Robert Schlaifer: Business Decisions ..., a.a.O., S. 29. George Hadley: Decision Theory..., a.a.O., S. 123.

7-3 Die Zweckmäßigkeit des Theorems des maximalen Erwartungswertes als Entscheidungskriterium

Das der Bayesschen Entscheidungslehre zugrunde liegende Entscheidungskriterium, das Bernoulli-Prinzip,[1] gründet sich auf dem Erwartungswert einer in der Gestalt noch offenbleibenden Nutzenfunktion.[2] Von den Vertretern der Bayesschen Entscheidungslehre wird bei der Beurteilung der Entscheidungskonsequenzen fast ausnahmslos auf den Spezialfall des Bernoulli-Prinzips, auf die Maximierung des Erwartungswerte, zurückgegriffen, das daher auch Bayessches Entscheidungskriterium genannt wird. Ursprünglich wurde das Prinzip der Maximierung des Erwartungswertes für Fälle aufgestellt, die durch sehr häufige Wiederhdungen der gleichen Situation gekennzeichnet sind, wie z.B. Glücksspiele.[3] Daher erscheint seine Anwendung auch auf Fälle einmaliger Problemsituationen nicht ohne weiteres möglich, denn in solchen Fällen können sich die unterschiedlichen Ergebnisse im Zeitverlauf nicht ausgleichen und damit kann sich langfristig auch nicht der Erwartungswert als Resultat der Einzelergebnisse einstellen. In der Tat lassen sich einige schwerwiegende Argumente gegen das Prinzip der maximalen Nutzenerwartung anführen:

(1) Dem Entscheidenden wird absolute Risikoneutralität unterstellt, die sich darin äußert, daß der Möglichkeit einer tatsächlichen negativen Abweichung vom Erwartungswert keine Rechnung getragen werden kann.

---

1 Zum Bernoulli-Prinzip vgl. Hans Schneeweiß: Entscheidungskriterien ..., a.a.O., S. 61 ff.

2 Vgl. dazu die Ausführungen des Abschnitts 7-2, in dem eine lineare Nutzenfunktion als zweckmäßig hingestellt wurde.

3 Vgl. Hans Schneeweiß: Entscheidungskriterien ..., a.a.O., S. 278 ff.

(2) Bei der Ermittlung der optimalen Aktion nach Maßgabe des maximalen Erwartungswertes ist die Streuung der Einzelergebnisse um den Erwartungswert nicht zu berücksichtigen. So ist es möglich, daß dem Entscheidenden mehrere Aktionsmöglichkeiten zur Verfügung stehen, die alle den gleichen Erwartungswert aufweisen, aber mit extrem unterschiedlichen Risiken behaftet sein können. Das bedeutet, daß im Extremfall eine mit Sicherheit eintreffende Situation mit einer Ungewißheitssituation verglichen wird.[1]

Diesen Einwänden ist aber entgegenzuhalten, daß die Berechnung des Erwartungswertes zur Entscheidungsfindung insofern plausibel und logisch erscheint, weil dadurch in Ungewißheitssituationen die Gesamtheit aller möglichen Abweichungen von den Ergebnissen der Handlungsmöglichkeiten minimiert wird.[2] Löst man sich außerdem von der Betrachtung einer einzelnen Entscheidung und legt die Summe aller laufend zu treffenden Entscheidungen zugrunde, dürfte der Entscheidende bei Beachtung des Prinzips der Maximierung des Erwartungswertes langfristig auch seinen Gesamtnutzen maximieren können, womit auch das Argument gegen die Übertragung des Kriteriums auf einmalige Situationen abgeschwächt wird.

Berücksichtigt man zudem, daß im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre zur Berechnung des Erwartungswertes in der Regel die "objektivierten" A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten verwendet werden, liegt ein weiterer Vorteil des Bayesschen Entscheidungskriteriums darin, daß es alle Ergebnisse einer gegebenen Aktion in das Entscheidungskalkül einbezieht und sie unter maximaler Ausnutzung aller erhältlichen Informationen mit der bestmöglichen Schätzung ihrer Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtet werden.[3]

---

1 Vgl. Winfried Mellwig: Anpassungsfähigkeit und Ungewißheitstheorie. Tübingen 1972, S. 112 ff.

2 Vgl. Dieter Schneider: Investition..., a.a.O., S. 124.

3 Vgl. T. R. Dyckman et al.: Decision Making ..., a.a.O., S. 278.

In vielen Fällen erweist sich auch die mangelnde Möglichkeit der Einbeziehung der Risikoneigung des Entscheidenden bei der Maximierung des Erwartungswertes nicht unbedingt als Nachteil, weil auf diese Weise die getroffenen Entscheidungen einer objektiven und logischen Beurteilung unterzogen werden können.

Im Hinblick auf die zu Beginn dieses Abschnitts aufgeführten Einwände sollte die Anwendung des Theorems des maximalen Erwartungswertes als Entscheidungskriterium jedoch auf folgendes Entscheidungssituationen beschränkt werden:[1]

(1) Das beste und das schlechteste der möglichen Ergebnisse sollte nicht zu stark voneinander abweichen.
(2) Die Streuung der Einzelergebnisse um den Erwartungswert sollte möglichst gleichmäßig sein.
(3) Wegen der Anwendung auf einmalige Entscheidungssituationen sollte die Summe der zu treffenden Entscheidungen möglichst gleichartig sein.
(4) In allen Fällen ist auf die Einhaltung der Liquiditätsrestriktion zu achten.

Unter Beachtung dieser Punkte dürfte gegen eine Anwendung des Bayesschen Entscheidungskriteriums bei praktischen betriebswirtschaftlichen Entscheidungssituationen wenig einzuwenden sein und dürfte auch zu sinnvollen Entscheidungen führen. Allerdings gibt das Bayessche Entscheidungskriterium keine Garantie dafür, daß das gewünschte Ergebnis sich tatsächlich ereignen wird. Das bedeutet aber nicht, daß deshalb die Entscheidung selbst falsch war. Denn wenn auch die Ereignisse sich anders als vorhersehbar entwickeln, ist doch stets eine Entscheidung aufgrund des maximalen Erwartungswertes die richtige, wogegen eine Entscheidung, die im Gegensatz zum Erwartungswert getroffen wird, immer die falsche ist, auch wenn sie zufällig zu einem Ergebnis führt, das man a priori nicht erwarten konnte.[2]

---

1 Ähnliche Überlegungen wurden bereits in Abschnitt 7-2 bezüglich des Geldwertes als Nutzenmaß angestellt. Die in den einzelnen Punkten (1) bis (4) gemachten Einschränkungen sind deshalb so vage, weil sie für den Einzelfall entschieden werden müssen.

2 Vgl. William T. Morris: Management Science..., a.a.O., S. 276.

7-4 Die Problematik der Berücksichtigung sämtlicher Umweltkonstellationen

Neben den bisher vorgebrachten Kritikpunkten an der Bayesschen Entscheidungslehre, die im wesentlichen die in der Literatur vorgebrachten Einwände wiedergaben, erscheint es uns wichtig, ein weiteres Argument gegen die Anwendung der Bayesschen Lösungsverfahren bei realen Entscheidungssituationen zu erörtern, das im Schrifttum bisher nicht besonders beachtet worden ist. Dabei handelt es sich um die Erfüllung der Voraussetzungen des Bayesschen Theorems, das im Rahmen der Bayesschen Entscheidungslehre der Ermittlung der A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten dient, mit denen die einzelnen Entscheidungskonsequenzen zur Berechnung der Erwartungswerte gewichtet werden. Die Voraussetzungen zur theoretisch einwandfreien Anwendung des Theorems sind:

(1) Die zu betrachtenden Ereignisse oder Umweltkonstellationen müssen sich gegenseitig ausschließen und
(2) den Ereignisraum vollständig ausfüllen.

Bei Entscheidungsproblemen in der betriebswirtschaftlichen Praxis bereitet die Erfüllung der Bedingung (1) meistens keine Probleme; anders jedoch die Voraussetzung (2). Gerade die Berücksichtigung aller alternativ möglicher Umweltzustände dürfte, ebenso wie die vollständige Erfassung sämtlicher Aktionsmöglichkeiten, nur in den seltensten Fällen gelingen. Damit ist aber die Frage zu beantworten, welchen Einfluß eine unvollständige Aufzählung der möglichen Ereignisse auf die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ausübt.

Nach dem Bayesschen Theorem in seiner diskreten Form für die Ereignisse A_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) und das Ereignis B

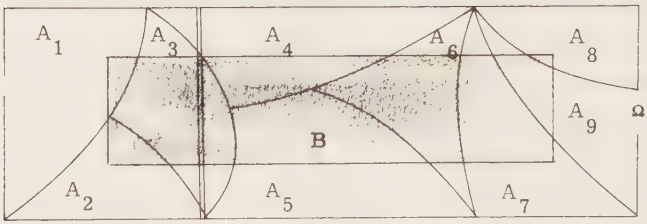
$$W(A_i/B) = \frac{W(A_i) \cdot W(B/A_i)}{\sum_{i=1}^{n} W(A_i) \cdot W(B/A_i)}$$

ergibt sich, daß bei Vernachlässigung einiger Ereignisse A_i sich die totale Wahrscheinlichkeit im Nenner verändert und damit auch die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten für ein beliebiges Ereignis A_i. Ebenso ergibt sich eine andere unbedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B, hervorgerufen durch die Veränderung der totalen Wahrscheinlichkeit.

Dieser Zusammenhang wird besonders deutlich durch eine Darstellung am Venn'schen Diagramm der folgenden Abbildung 7-2.

Abbildung 7-2

Auswirkungen der unvollständigen Erfassung der Umweltzustände auf die totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B



Gemäß der Forderung nach einer vollständigen Erfassung aller Ereignisse wird bei realen Entscheidungsproblemen der Entscheidende auch bei Vernachlässigung einiger Umweltzustände (A_i) der Summe der A-priori-Wahrscheinlichkeiten den Wert von eins zuordnen, so daß sich gleichzeitig auch die Wahrscheinlichkeiten für die Umweltkonstellationen a priori verschieben. Daraus folgt, daß unter Umständen eine völlig falsche Gewichtung der Einzelergebnisse der Aktionen vorgenommen wird, die gegebenenfalls zu einer falschen Entscheidung führt.

Zwei Überlegungen lassen jedoch den Nachteil einer eventuellen Nicht-Berücksichtigung möglicher Umweltzustände weniger schwerwiegend erscheinen, als man zunächst vermuten möchte:

(1) Bei einer größeren Zahl von Umweltzuständen sind die Auswirkungen des "Fehlens" einer oder mehrerer Ausprägungen nicht so bedeutend, weil sowohl die totale Wahrscheinlichkeit als auch die A-priori-Wahrscheinlichkeiten sich in diesem Fall nur geringfügig verändern.

(2) Bei vielen realen Entscheidungsproblemen können die möglichen Umweltkonstellationen durch eine kontinuierlich verteilte Umweltvariable in das Entscheidungskalkül aufgenommen werden. In diesen Fällen ist die Gefahr einer Nicht-Beachtung von Umweltzuständen nicht zu befürchten. Allerdings ergibt sich hierbei das Problem, den Bereich der Variablen entsprechend festzulegen - eine Schwierigkeit, die sich durch die Wahl eines nicht zu engen Intervalls umgehen läßt.

Ziel der Untersuchung war zu prüfen, welchen Beitrag die Bayessche Entscheidungslehre zur Lösung von betriebswirtschaftlichen Entscheidungsproblemen zu leisten vermag. Anhand einer Reihe von ausgewählten Beispielen wurde festgestellt, daß das Anwendungsspektrum der Bayesschen Entscheidungslehre sehr breit ist und die vorgestellten Verfahren sich gut dazu eignen, betriebswirtschaftliche Entscheidungssituationen unterschiedlicher Problemstrukturen zu analysieren und sinnvoll zu lösen.

Neben der Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten erwiesen sich in den verschiedenen Beispielen die folgenden Merkmale der Bayesschen Entscheidungslehre als besonders vorteilhaft:

(1) die explizite Berücksichtigung sämtlicher ökonomischer Konsequenzen;
(2) die Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten.

Es konnte gezeigt werden, daß die besondere Beachtung der möglichen Folgen unternehmerischen Handelns zu eindeutigen und logisch begründbaren Entscheidungen führt, indem die monetären Erwartungswerte zur Grundlage des Entscheidungskalküls gemacht werden. Trotz der anfänglichen Bedenken, das Prinzip der Maximierung des Erwartungswertes auch auf einmalige Entscheidungssituationen zu übertragen, dürften - vor allem nach der abklärenden Diskussion des Abschnitts 7-3 und Beachtung der dort gemachten Einschränkungen - die im Mittelpunkt der Bayesschen Analyse stehenden ein- oder mehrfachen Erwartungswertberechnungen als sinnvolles Entscheidungskriterium anzusehen sein, weil sie die durch die Gesamtheit aller möglichen Umweltkonstellationen gekennzeichnete Situation vor Eintritt eines ganz bestimmten Umweltzustandes vollständig erfassen. Damit werden auch die weniger wahrscheinlichen Ereignisse mit in das Entscheidungskalkül einbezogen; denn die Tatsache, daß letztlich die auf die Umwelt einwirkenden Faktoren nur einen einzigen Zustand eintreten lassen, rechtfertigt nicht Konstellationen mit nur geringer Eintrittswahrscheinlichkeit zu ignorieren.

Besonders hervorzuheben ist, daß die Bayessche Entscheidungslehre auch den Prozeß der Informationsgewinnung als weitere mögliche Handlungsalternative in das Entscheidungsmodell einbezieht. Während die herkömmliche statistische Entscheidungstheorie die ökonomischen Konsequenzen der Informationssammlung vernachlässigt und damit häufig wirtschaftlich nicht vertretbare Stichprobenumfänge vorschlägt, ist eine exakte Abwägung zwischen den Kosten der Unsicherheit und den Informationskosten mit Hilfe des Bayesschen Lösungsansatzes möglich und logisch; denn es liegt nahe, den Wert einer Information an dem Ausmaß zu messen, den sie zur Verbesserung der Ergebnisse der Entscheidung beiträgt.

Wenn auch das Konzept der Berücksichtigung aller ökonomischer Auswirkungen einer Entscheidung in Form von Erwartungswerten ein adäquates Instrument zur Lösung von Entscheidungsproblemen darstellt, folgt doch die besondere Eignung des Verfahrens für betriebswirtschaftliche Entscheidungen erst durch die Verwendung subjektiver Wahrscheinlichkeiten.

Dadurch wird es möglich, die in das Entscheidungskalkül eingehende Informationsmenge ceteris paribus zu maximieren. Ein Festhalten an der "objektiven" Definition der Wahrscheinlichkeit dagegen berücksichtigt nur den statistisch meßbaren Teil von Informationen: die Stichprobenbeobachtung. Daher beruhen die mit Hilfe der Bayesschen Entscheidungslehre getroffenen Entscheidungen, wenn die A-priori-Kenntnisse nicht völlig aus der Luft gegriffen sind, auf einem weitaus größeren Wissensstand als die der herkömmlichen Verfahren; denn zur Stichprobeninformation tritt das zusätzliche A-priori-Wissen. Bedenkt man zudem, daß die Ungewißheit als ausschließliche Ursache für eine Fehlentscheidung anzusehen ist, muß jedes

Verfahren, das den Abstand zwischen eigentlich notwendiger und überhaupt erreichbarer Information weiter verringert als ein anderes, die besseren oder richtigeren Ergebnisse liefern.

Etwaige Einwände gegen die Zulässigkeit subjektiver Wahrscheinlichkeiten glauben wir durch die Sensibilitätsanalyse des Abschnitts 3-3 zerstreut zu haben. Dort ergab sich, daß die Bedenken, durch den Ansatz subjektiver Wahrscheinlichkeiten sei jede damit gefällte Entscheidung mehr oder weniger willkürlich, unzutreffend sind. Selbst bei einem Ansatz von extremen subjektiven Wahrscheinlichkeiten machte sich der Einfluß des Stichprobenergebnisses auf die A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten so bemerkbar, daß man zu recht von "objektivierten" A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten sprechen kann. Außerdem sind diese Einwände auch insofern gegenstandslos, weil, wie im Abschnitt 7-1 gezeigt wurde, die subjektiven Wahrscheinlichkeiten den Gesetzen der Logik und Kohärenz gehorchen sollten und damit willkürliche Wahrscheinlichkeitszuordnungen sowieso nicht zulässig sind.

Ein relativer starker Einwand gegen das subjektive Konzept der Bayesschen Entscheidungslehre konnte allerdings auch in dieser Untersuchung nicht völlig befriedigend entkräftet werden: das Problem der numerischen Bestimmung subjektiver Glaubwürdigkeiten. Hier muß man sich darüber im klaren sein, daß eine exakte Messung subjektiver Glaubwürdigkeiten gar nicht möglich sein kann. Das sollte aber nicht ein Verwerfen des Bayesschen Lösungsansatzes zur Folge haben. Vielmehr sind wir der Meinung, daß eine auch nur annähernde Ermittlung für viele praktische Entscheidungsprobleme sehr nutzbringend sein dürfte, weil allein schon die konsequente und präzise Aufstellung und gedankliche Durchdringung der entscheidungsrelevanten Einflußfaktoren ein gewisses Maß an Objektivitä und Rationalität

mit sich bringt, das andernfalls nicht gegeben wäre. Der Entscheidende sieht sich gezwungen, bei allem, was er tut, unter Beachtung der möglichen Folgen so rational wie möglich zu handeln.

Diese Feststellungen gelten verstärkt für den Bereich betriebswirtschaftlicher Entscheidungen, die durch die Einmaligkeit ihrer Problemstellung, die erhebliche Unsicherheit ihrer in die Millionenwerte gehenden Konsequenzen und durch das Vorhandensein von A-priori-Wissen in Form von Erfahrungen qualifizierter Fachkräfte und vieler statistisch nicht meßbarer Informationen charakterisiert sind, so daß die Bayessche Entscheidungslehre besonders beim Treffen echter Führungsentscheidungen angewendet werden kann. Wie die Beispiele 5-1(1) und 5-2(1) zeigen, ist selbstverständlich auch eine Verwendung des Bayesschen Konzepts auf der mittleren oder unteren Führungsebene eines Unternehmens möglich, jedoch sollte wegen der Gefahr subjektiver Verzerrungen die Objektivität und Rationalität dessen, an den die Entscheidungsbefugnis delegiert wird, überprüft werden.

Die Grenzen der Bayesschen Lösungsverfahren liegen dort, wo jede Methode als Hilfsmittel zur Entscheidungsfindung versagt, nämlich in folgenden Fällen:

(1) Das anstehende Entscheidungsproblem ist so dringend, daß für eine quantitative Aufstellung eines Entscheidungsmodells keine Zeit mehr bleibt.

(2) Generell wäre eine Analyse des Entscheidungsproblems möglich, jedoch steht der damit verbundene Aufwand an Kosten in keinem Verhältnis zu den möglichen Konsequenzen der Aktionen.

(3) In vielen Fällen ist das Entscheidungsproblem derartig komplex, daß es nicht mit den Instrumenten der Bayesschen Entscheidungslehre zu erfassen ist. Diese Schwierigkeit tritt besonders dann auf, wenn die Zahl der Aktionsmöglichkeiten relativ groß ist. Häufig ist aber auch dann noch eine heuristische Lösung möglich, indem man

das Problem auf seine Kernpunkte begrenzt und sich mit einer angenäherten Lösung zufrieden gibt.

(4) Bei bestimmten Entscheidungsproblemen mag es vorkommen, daß der Entscheidende überhaupt nicht in der Lage ist, subjektive A-priori-Wahrscheinlichkeiten aufzustellen, auch wenn er darin geübt ist. Sind zudem auch keine objektiven Wahrscheinlichkeiten oder sonstigen Informationen greifbar, bleibt als einziger Ausweg, über dem Raum der möglichen Umweltzustände eine Gleichverteilung anzunehmen.

Trotz der im Verlauf der Untersuchung vorgebrachten Bedenken und Schwächen erweist sich damit die Bayessche Entscheidungslehre als operationales Hilfsmittel zur Lösung betriebswirtschaftlicher Entscheidungsprobleme, deren Aktionsergebnisse von dem ungewissen Eintreffen der möglichen Umweltkonstellationen abhängen. Dabei ist allerdings zu berücksichtigen, daß kein entscheidungstheoretisches Verfahren, und sei es noch so komplex oder sophistisch, die allen Entscheidungen immanente Ungewißheit in Gewißheit umzuwandeln vermag. Das bedeutet, daß die Anwendung der Bayesschen Entscheidungslehre keine Garantie dafür geben kann, daß man nun eine einzelne Entscheidung richtiger trifft. Jedoch darf man annehmen, daß die Summe aller möglichst gleichartiger Entscheidungen, die über einen längeren Zeitraum hinweg in einem Unternehmen getroffen werden, zu besseren Ergebnissen führt.

SYMBOLVERZEICHNIS

Kapitel 2

A und B	beliebige Ereignisse
W( )	Wahrscheinlichkeit für ( )
Ω	Ereignisraum
e und d	Ereignisse "einwandfrei" und "defekt"
Q und X	beliebige Zufallsvariable
f( )	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer kontinuierlich verteilten Zufallsvariablen ( )
h( )	absolute Häufigkeit eines Ereignisses ( )
S mit s_j	Umweltzustände
A mit a_i	Aktionsmöglichkeiten
Z mit z_k	Informationsergebnisse
e_{ij}	bedingte Ergebnisse der Aktion a_i bei Eintreffen des Umweltzustandes s_j

Kapitel 3

Θ	Anteil fehlerhafter Buchungen eines Prüfungsfeldes
p	" - " " in der Stichprobe
M	Anzahl fehlerhafter Buchungen eines Prüfungsfeldes
x	" " " in der Stichprobe
d	Differenz zwischen Θ und p
N	Umfang der Grundgesamtheit (Prüfungsfeld)
n	Umfang der Stichprobe
$\xi_{o/1}$	Grenzen der Zufallsvariablen X
f_H	Häufigkeiten der Hypergeometrischen Verteilung
e	Eulersche Zahl
χ^2	Chi-Quadrat (-Verteilung)
cum (Index)	kumulierte Werte
c (Index)	kritische Werte

Kapitel 4

S mit s_j	Umweltkonstellationen (Marktanteile)
A mit a_i	Aktionsmöglichkeiten (Index 1 immer 'Einführung'
(1 bzw. 2 als Index)	Index 2 immer Nicht-Einführung eines Produktes)
o bzw. 1 (Index)	A-priori- bzw. A-posteriori-Werte (z.B. für Wahrscheinlichkeiten oder Erwartungswerte)
k	Kosten
a	fixe mengenunabhängige Kosten
b	Stückkosten
Q mit q	Umweltvariable für den Absatz in Stück
P mit p	" " " " anteilsmäßig am Gesamtmarkt
E_i( )	Erwartungswert von ( ), i = 1 und 2
f_N( )	Normalverteilung mit den Parametern ( )
σ( )	Streuungsmaß für die Zufallsvariable ( )
σ	Streung der Grundgesamtheit

Die für ein Kapitel bereits erläuterten Symbole werden für die folgenden Kapitel nicht mehr erläutert, wenn sie dort die gleich oder ähnliche Bedeutung haben.

e_i	Erlöse der Aktion a_i in Abhängigkeit zur abgesetzten Menge (als Funktion)
d	Erlös pro abgesetzte Mengeneinheit
p_c und q_c	Erlösschwelle anteilsmäßig bzw. absolut
l_i	(Opportunitäts-) Verluste der Aktion a_i
$\bar{x}$	Stichprobenmittelwert
s	Standardabweichung der Stichprobenwerte
$\sigma_{\bar{x}}$	Standardabweichung der Stichprobenmittelwerte
I	Information(smenge)
IK	Informationskosten
IE	Informationsertrag
opt (Index)	optimaler Wert
VI	vollkommene oder perfekte Information
s (Index)	bei Sicherheit (oder auch auf S. [illegible] bei Stichprobe)
z_i	Testergebnisse
net (Index)	Nettowert
s_c	Erlösschwelle für die Umweltvariable S (Marktanteil)
z (mit Index c oder o)	Zufallsvariable zur Umformung einer Normalverteilung in die Standardnormalverteilung
$L_N(z_c)$	"normale Verlustfunktion" für den Wert z_c
k	variable (Stichproben-) Informationskosten
n^*	Größe zur Berechnung des optimalen Stichprobenumfangs

Kapitel 5

Θ	Ausschußanteil eines Produktionsloses
i = 0, 1, . . . , 5) (Index)	Bezeichnung der Entscheidungsstufe i
a_1	Produktionsanlauf ohne vorherige Einstellung (Aktion)
a_2	" " mit " " "
a_3	Inspektion eines Probestückes
ges (Index)	Bruttowert
$\bar{\Phi}$	Anteil der möglicherweise als Ausschuß erfaßter einwandfreier Produkte
a_1	nochmalige Überprüfung des Ausschusses (Aktion)
a_2	Verkauf des Ausschusses als Schrott (Aktion)
k	Ereignis "von der Maschine als Ausschuß erfaßt"
a_1	Ablehnung des Angebots (Aktion)
a_2	Annahme des Angebots ohne Prüfung (Aktion)
a_3	" " mit " "
α und ν	Parameter der Gammaverteilung
$f_\Gamma(\ )$	Gammaverteilung mit ( )
$f_P(\ )$	Poissonverteilung mit ( )
k	relevante Kosten

Kapitel 6

a_1	Kauf der kleineren Anlage A auf Stufe 1
a_2	" " größeren " B " " 1
a_3	Kauf einer zweiten Anlage A " " 3
a_4	kein weiterer Kauf einer Anlage A auf Stufe 3
Z und E	Zufall und Entscheidung
K	Ereignis Konkurs
V_i	Verschuldungsgrad

LITERATURVERZEICHNIS

Adelson, R. M.: Criteria for Capital Investment: An Approach through Decision Theory. In: Operational Research Quaterly, Vol. 16 (1965), S. 19 - 50.

AICPA : Relationship of Statistical Sampling to Generally Accepted Auditing Standards. A Special Report by the Committee on Statistical Sampling. In: JofA, Bd. 118 (1964). S. 56 - 58.

Albach, Horst: Wirtschaftlichkeitsrechnung unter unsicheren Erwartungen. Köln und Opladen 1959.

Derselbe: Die Prognose im Rahmen unternehmerischer Entscheidungen. In: Diagnose und Prognose als wirtschaftswissenschaftliche Methodenprobleme. Hrsg. H. Giesch und K. Borchardt. Berlin 1962, S. 201 - 214.

Derselbe: Informationsgewinnung durch strukturierte Gruppenbefragung. Die Delphi-Methode. In: ZfB, 40. Jg. (Ergänzungsheft) (1970), S. 11 - 26.

Alderson, Wroe and Green Paul E.: Planning and Problem Solving in Marketing. Homewood (Illinois) 1964. (2nd. printing 1966).

Bass, Frank M.: Marketing Research Expenditures: A Decision Modell. In: Edgar A. Pessemier: New Product Decisions. An analytical approach. Bd. 2 der Reihe: Perspectives in Marketing Series. Ed. R. D. Buzzel and Frank M. Bass. New York · St. Louis · San Francisco · Toronto · London · Sydney 1966, S. 119 - 138; subject to minor changes, reproducted from the JoB, January 1963, pp. 77 - 90.

Bayes, Thomas: An Essay towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances. In: Philosophical Transactions, Vol. 53 (1763), S. 376 - 398 und S. 401 - 403; sowie Vol. 54 (1764), S. 298 - 310. Wiederabgedruckt in: Biometrika, Vol. 45 (1958), S. 296 - 315.

Beaver, William H.:	Financial Ratios as Predictors of Failure. In: Empirical Research in Accounting. Selected Studies. Ed. by S. Davidson. In: Journal of Accounting Research, Vol. 4 (1966), S. 71 - 111 und 123 - 127.
Beckmann, Liesel:	Finanzierung. In: Handwörterbuch der Betriebswirtschaft. 3. Aufl. Bd. 2 Stuttgart 1958, Sp. 1830 ff.
Bleymüller, Josef:	Hilfsblätter zur Vorlesung Statistik für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler I. Münster Wintersemester 1971/72.
Boot, John C. G. and Cox, Edwin B.:	Statistical Analysis for Managerial Decisions. New York · St. Louis · San Francisco · London 1970.
Buchner, Robert:	Zur Anwendung des Bayesschen Theorems bei Buchprüfungen auf Stichprobenbasis. In: ZfB, 41. Jg. (1971), S. 1 - 26.
Bühlmann, Hans, Loeffel, Hans und Nievergelt, Erwin:	Einführung in die Theorie und Praxis bei Unsicherheit. Bd. 1 der Reihe "Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics". Ed. by M. Beckmann and H. P. Künzi. Berlin · Heidelberg · New York 1967.
Chin, John S. and De Coster, Don T.:	Multiple Product Costing by Multiple Correlation on Analysis. In: Acc. Rev., Vol. XLI (1966), S. 673 - 680.
Cyert, Richard M.:	Test-Checking and the Poisson Distribution - A Further Comment. In: Acc. Rev., Bd. 32 (1957), S. 395 - 397.
Dinter, Hans:	Zur Frage der Verwendung von Stichprobenverfahren im Rahmen von Prüfungshandlungen. In: WPg, 15. Jg.(1962), S. 85ff
Dyckman, T. R., Smidt, S. and McAdams, A. K.:	Management Decision Making under Uncertainty: An Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. 1st. printing Toronto · Ontorio 1969.
Edwards, Ward, Lindman, Harold and Savage, Leonard J.:	Bayesian Statistical Inference for Psychological Research. In: Psychological Review, Vol. 70 (1963), S. 193 - 241.
Elmendorf, Karl:	Anwendbarkeit von Zufallsstichproben bei der Abschlußprüfung. Düsseldorf 1963.
Feller, William:	Probability and Profit. A Study of Economic Behavior along Bayesian Lines. Homewood (Illinois) 1965.

Fishburn Peter C.:	Decision and Value Theory. New York · London · Sydney 1964.
Fisher, Ronald A.:	Statistical Methods for Research Workers. 13.th. ed., New York 1958 (1st. ed., Edinburgh and London 1925).
Forester, John:	Statistical Selection of Business Strategies. Homewood (Illinois) 1968.
Frank, Ronald E. and Green, Paul E.:	Quantitative Methods in Marketing. Englewood Cliffs (New Jersey) 1967.
Goldberg, S.:	Die Wahrscheinlichkeit. Eine Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Autorisierte deutsche Übersetzung: K. Wigand. Braunschweig 1964.
Gomm, Gerhart:	Stichprobenverfahren in der Revisionstechnik. Diss. Nürnberg 1965.
Good, Irving J.:	Probability and the Weighing of Evidence. London 1950.
Derselbe:	The Estimation of Probabilities: An Essay on Modern Bayesian Methods. Research Monograph No. 30 by the M.I.T. Press. Cambridge (Massachusetts) 1968.
Green, Paul E.:	Am Application of Bayesian Decision Theory to a Problem in Long Range Princing Strategy. In: Journal of the American Statistical Associations, Vol. 54 (1962), S. 30 - 34.
Derselbe:	Bayesian Decision Theory in Advertising. In: Journal of Advertising Research, Vol. 2 (1962), S. 33 - 41.
Derselbe:	Some Intra-Firm Applications of Bayesian Decision Theory to Problems in Business Planning. Dissertation in Economics, University of Pennsylvania 1962.
Derselbe:	Bayesian Decision Theory in Pricing Strategy. In: Journal of Marketing, Vol. 27 (1963), S. 1 - 4.
Derselbe:	Uncertainty, Information and Marketing Decisions. In: Theory in Marketing. Ed. R. Cox, W. Alderson and S. J. Shapiro. Homewood (Illinois) 1964, S. 333 - 354.
Green, Paul E., Halbert, Michael H. and Robinson, Patrick J.:	An Experiment in Probability Estimation. In: Journal of Marketing, Vol. II (1965), S. 266 - 273.
Green, Paul E. and Tull, Donald S.:	Research for Marketing-Decisions. 2nd. Ed. Englewood Cliffs (New Jersey) 1970.

Gutenberg, Erich:	Grundlagen der Betriebswirtschaftslehre. 1. Bd.: Die Produktion. 18. neubearbeitete und erweiterte Aufl. Berlin · Heidelberg · New York 1972.
Hadley, George	Introduction to Probability and Statistical Decision Theory. San Francisco · Cambridge · London · Amsterdam 1967.
Härle, Dietrich:	Finanzierungsregeln und ihre Problematik. Wiesbaden 1961.
Halmos, Paul R.:	Measure Theory. Princeton (New Jersey) · Toronto · London · New York 1950.
Hax, Karl:	Langfristige Finanz- und Investitionsentscheidungen. In: Handbuch der Wirtschaftswissenschaften. Hrsg. von K. Hax und Th. Wessels. 2. überarbeitete und erweiterte Aufl. Bd. I: Die Betriebswirtschaft. Köln und Opladen 1966, S. 399 ff.
Heinen, Edmund:	Die Zielfunktion der Unternehmung. Festschrift zum 65. Geburtstag von Erich Gutenberg. Hrsg. von H. Koch. Wiesbaden 1962. S. 9 - 71.
Heister, Matthias:	Rentabilitätsanalyse von Investitionen. Köln und Opladen 1962.
Hespos, Richard F. and Strassmann, Paul E.:	Stochastic Decision Trees for the Analysis of Investment Decisions. In: Information for Decision Making: Quantitative and Behavioral Dimensions. Ed. by A. Rappaport. Englewood Cliffs (New Jersey) 1970, S. 286 - 300.
Hodges, Jr., J. L. and Lehmann, E. L.:	Basic Concept of Probability and Statistics. San Francisco · London · Amsterdam 1964.
Kellerer, Hans:	Theorie und Technik des Stichprobenverfahrens. München 1963.
Kemeny, John G., Schleifer, jr., Arthur, Snell, J. Laurie and Thompson, Gerald L.:	Mathematik für die Wirtschaftspraxis. Titel der amerikanischen Originalausgabe: Finite Mathematics with Business Applications. Deutsche Übersetzung: H.-J. Zimmermann, Berlin 1966.

Koopman, Bernard O.: The Axioms and Algebra of Intuitive Probability. In: Annals of Mathematics. Vol. 41 (1940), S. 269 - 292.

Kotler, Philip: Computer Simulation in the Analysis of New-Product Decisions. In: Applications of the Sciences in Marketing Management. Ed. by F. M. Bass, Ch. W. King and E. A. Pessemier. New York · London · Sydney 1968, S. 283 - 331.

Kraft, jr., William H.: Statistical Sampling for Auditors: A new Look. In: JofA, Bd. 125/126 (1968), S. 49 - 56.

Krelle, Wilhelm: Präferenz- und Entscheidungstheorie. Unter Mitarbeit von D. Coenen. Tübingen 1968.

Krüger, Ralf: Grundlagen der Planung einer aktienrechtlichen Jahresabschlußprüfung. Diss. Münster 1968.

Kühn, Richard: Möglichkeiten rationaler Entscheidung im Absatzsektor unter besonderer Berücksichtigung der Unsicherheit der Information. Bd. 5 der Schriftenreihe "Prüfen und Entscheiden" des Betriebswirtschaftlichen Instituts Bern. Hrsg. von W. Müller. Bern und Stuttgart 1969.

Laplace, de, Pierre Simon: Essai philosophique sur les probabilités. Paris 1814.

La Valle, Irving, H.: An Introduction to Probability. Decision and Inference. New York · London · Sydney 1970.

Leffson, Ulrich, Lippmann, Klaus und Baetge, Jörg: Zur Sicherheit und Wirtschaftlichkeit der Urteilsbildung bei Prüfungen. Bd. 1 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms-Universität Münster. Hrsg. von U. Leffson. Düsseldorf 1969.

Lindgren, Bernard W.: Statistical Theory. 2nd. ed. New York · London 1968.

Lindley, D. V. : Introduction to Probability and Statistics from a Bayesian Viewpoint. Part 1: Probability. Cambridge 1965.

Loitlsberger, Erich: Treuhand- und Revisionswesen. 2., überarbeitete und erweiterte Aufl. Stuttgart 1961.

Magee, John F.: Decision Trees for Decision Making. In: Harvard Business Review, Vol. 42 (1964), S. 126 - 135.

Derselbe: How to Use Decision Tree in Capital Investment. In: Harvard Business Review, Vol. 42 (1964), S. 79 - 96.

Mao, James C. T.: Quantitative Analysis of Financial Decisions. London 1969.

Massé, Pierre: Optimal Investment Decisions. Englewood Cliffs (New Jersey) 1962.

Massy, William F.: Forecasting the Demand for New Convenience Products. In: Application of Management Sciences in Marketing. Ed. by D. B. Montgomery and G. L. Urban. Englewood Cliffs (New Jersey) 1970, S. 442 - 455.

Meffert, Heribert: Marketing. In: Management Enzyklopädie. Bd. 4 München 1971, S. 383 - 414.

Mellerowicz, Konrad: Unternehmenspolitik. Bd. 2 Freiburg 1963.

Mellwig, Winfried: Anpassungsfähigkeit und Ungewißheitstheorie. Tübingen 1972.

Menges, Günter: Stichproben aus endlichen Gesamtheiten. Theorie und Technik. Ein Beitrag zur Methodenlehre der Statistik. Frankfurt am Main 1959.

Derselbe: Über Thomas Bayes (1702 - 1761) und das Theorem - Versuch einer Würdigung. In: Geschichte und Zukunft. Anton Hain zum 75. Geburtstag. Hrsg. von A. Diemer. Meisenheim am Glan 1967, S. 485 - 498.

Derselbe: Entscheidungen unter Risiko und Ungewißheit. In: Entscheidung und Information. Einführung in moderne Entscheidungskalküle und elektronische Informationssysteme mit Beiträgen von G. Menges, H. Schneeweiß, H. Hax und O. H. Poensgen. Hrsg. von G. Menges. Frankfurt am Main · Berlin 1968, S. 9 - 35.

Derselbe: Grundriß der Statistik. Teil 1: Theorie. Köln und Opladen 1968.

Derselbe: Grundmodelle wirtschaftlicher Entscheidungen. Einführung in moderne Entscheidungstheorien unter besonderer Berücksichtigung volks- und betriebswirtschaftlicher Anwendungen. Köln und Opladen 1969.

Menges, Günter:	Das Sequentialtestverfahren, insbesondere seine betriebswirtschaftliche Anwendung. In: ZfB, 28. Jg (1958), S. 75 ff.
Mises, von, Richard:	Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Leipzig · Wien 1931.
Morgan, Bruce W.:	An Introduction to Bayesian Statistical Decision Processes. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968.
Morris, William T.:	Management Science in Action. Homewood (Illinois) 1963.
Derselbe:	Management Science: A Bayesian Introduction. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968.
Neumann, von, John and Morgenstern, Oskar:	Theory of Games and Economic Behavior. 2nd. revised ed. Princeton (New Jersey) 1947.
Neyman, Jerzey:	On the Problem of Confidence Intervals. In: AMS, Bd. 6 (1935), S. 111 - 116.
Neyman, Jerzey and Pearson, Egon S.:	Contributions to the Theory of Testing Statistical Hypotheses. In: Statistical Research Memoirs, University of London. Bd. 1 (1936) und Bd. 2 (1938), S. 25 ff
Nieschlag, Robert, Dichtl, Erwin und Hörschgen Hans:	Einführung in die Lehre von der Absatzwirtschaft. Ein entscheidungstheoretischer Ansatz. Berlin 1968.
Pack, Ludwig:	Betriebliche Investition. Wiesbaden 1959.
Parzen, Emanuel:	Modern Probability. Theory and Its Applications. New York · London 1960.
Pessemier, Edgar A.:	New-Product Decisions. An analytical approach. Bd. 2 der Reihe: Perspectives in Marketing Series. Ed. R. D. Buzzel and F. M. Bass. New York · St. Louis · San Francisco · Toronto · London · Sydney 1966.
Peters, William S. and Summers, George W.:	Statistical Analysis for Business Decisions. Englewood Cliffs (New Jersey) 1968.
Phillips, L. D. and Edwards, Ward:	Conservatism in a Simple Probability Inference Task. In: Decision Making. Selected Readings. Ed. by W. Edwards and A. Tversky. Harmondsworth (Middlesex) · Baltimore · Ringwood (Victoria) 1967, S. 239 - 254.

Pratt, John W., Raiffa, Howard and Schlaifer, Robert: Introduction to Statistical Decisions Theory. New York · St. Louis · San Francisco · Toronto · London · Sydney 1965.

Rackles, Rolf: Das Problem der repräsentativen Auswahl bei der aktienrechtlichen Pflichtprüfung. Frankfurt 1961.

Raiffa, Howard: Decision Analysis. Introductory Lectures on Choices under Uncertainty. 2. Aufl. Reading (Massachusetts) · Menlo Park (California) · London · Don Mills (Ontorio) 1970.

Raiffa, Howard and Schlaifer, Robert: Applied Statistical Decision Theory. Boston 1961.

Ramsey, Frank P.: Truth and Probability (1962) and Further Considerations (1928). In: The Foundations of Mathematics and other Logical Essays. Ed. Braithwaithe. London · New York 1931.

Ray, J. C.: Classification of Audit Evidence. In: JofA, Bd. 117 (1964), S. 42 - 47.

Roberts, Harry V.: The New Business Statistics. In: Journal of Business, Bd. 33 (1960), S. 21 - 30.

Derselbe: Bayesian Statistics in Marketing. In: Journal of Marketing, Vol. 27 (1963), S. 1 - 14.

Rummel, R. J.: Understanding factor analysis. In: The Journal of Conflict Resolution. A Quaterly for Research Related to War and Peace, Vol. XI (1967), S. 444 - 480.

Sasaki, Kyohei: Statistics for Modern Business Decision Making. Belmont (California) 1968.

Savage, Leonard J.: The Foundations of Statistics. New York · London 1954.

Derselbe: Subjective Probability and Statistical Practice. In: The Foundations of Statistical Inference. A Discussion, opened by L. J. Savage at a meeting of the Joint Statistics Seminar Birkbeck and Imperial Colleges in the University of London. General Ed.: M. S. Bartlett. London . New York 1962, S. 9 - 35.

Schacht, Knut: Die Bedeutung der Finanzierungsregeln für unternehmerische Entscheidungen. Bd. 17 der Schriftenreihe "Betriebswirtschaftliche Beiträge". Hrsg. H. Münstermann. Wiesbaden 1971.

Schlaifer, Robert: Probability and Statistics for Business Decisions. New York · Toronto · London 1959.

Derselbe: Introduction to Statistics for Business Decisions. New York · Toronto · London 1961.

Schmetterer, Leopold: Einführung in die mathematische Statistik. 2. verbesserte und wesentlich erweiterte Aufl. Wien · New York 1966.

Schneeweiß, Hans: Entscheidungskriterien bei Risiko. Berlin · Heidelberg · New York 1967.

Schneider, Dieter: Investition und Finanzierung. Lehrbuch der Investitions-, Finanzierungs- und Ungewißheitstheorie. Köln und Opladen 1970.

Schulte, Elmar B.: Quantitative Methoden der Urteilsgewinnung bei Unternehmensprüfungen. Bd. 3 der Schriftenreihe des Instituts für Revisionswesen der Westfälischen Wilhelms- Universität Münster. Hrsg. von U. Leffson. Düsseldorf 1970.

Sorensen, James E.: Bayesian Analysis in Auditing. In: Acc. Rev., Vol. XLIV (1969), S. 555 - 561.

Stange, Kurt und Henning, Hans Joachim: Formeln und Tabellen der mathematischen Statistik. 2. völlig neu bearbeitete Aufl. Berlin · Heidelberg · New York 1966.

Stettler, Howard F.: Auditing Principles. 2nd. ed. Englewood Cliffs (New Jersey) 1961.

Stützel, Wolfgang: Liquidität. In: Handwörterbuch der Sozialwissenschaften. Bd. 6 Stuttgart · Tübingen · Göttingen 1959, S. 622 ff.

Sturm, Siegfried: Mehrstufige Entscheidungen unter Ungewißheit. Zur Theorie adaptiver Prozesse. Meisenheim am Glan 1970.

Tietz, Bruno: Grundlagen der Handelsforschung. Marketingtheorie. Bd. 1: Die Methoden. Rüschlikon 1969.

Tracy, John A.: Bayesian Statistical Methods in Auditing. In: Acc. Rev. Vol. XL (1969), S. 90 - 99.

Derselbe: Bayesian Statistical Confidence Intervals for Auditors. In: JofA, Bd. 127/128 (1969), S. 41 - 47.

Trentin, H. G.: Sampling in Auditing - A case Study. In: JofA, Bd. 125/126 (1968), S. 39 - 43.

Tversky, Amos: Additivity, Utility and Subjective Probability. In: Decision Making. Selected Readings. Ed. W. Edwards and A. Tversky. Harmondworth (Middlesex) · Baltimore · Ringwood (Victoria) 1967, S. 208 - 237.

Vance, Lawrence L. and Neter, John: Statistical Sampling for Auditors and Accountants. New York 1956.

Venn, John: The Logic of Chance. London 1888 (Reprinted. New York 1963).

Wald, Abraham: Sequential Analysis. New York 1947 (6th. printing 1963).

Derselbe: Statistical Decision Function. New York 1950.

Weber, Karl: Projektanalyse zur Einführung eines neuen Produktes unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: ZfbF, N.F., 19. Jg. (1967), S. 413 - 420.

Derselbe: Projektanalyse unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: Die Unternehmung. Schweizerische Zeitschrift für Betriebswirtschaft, 23. Jg. (1969). Nr. 1, S. 1 - 20.

Derselbe: Entscheidungsprozesse unter Verwendung des Theorems von Bayes. In: Entscheidungen bei unsicheren Erwartungen. Beiträge zur Theorie der Unternehmung. Hrsg. von H. Hax. Opladen 1971, S. 69 - 99.

Wetzel, Wolfgang, Jöhnk, Max-Detlev und Naeve, Peter: Statistische Tabelle. Berlin 1967.

Wild, Jürgen: Unternehmerische Entscheidungen, Prognosen und Wahrscheinlichkeit. In: ZfB, 39. Jg. (1969), S. 60 - 80.

Derselbe: Zur Problematik der Nutzenbewertung von Informationen. In: ZfB, 41. Jg. (1971), S. 315 ff.

Wittmann, Waldemar: Ungewißheit und Planung. In: ZfhF, N.F., 10. Jg. (1958), S. 499 - 510.

L E B E N S L A U F

Am 17. Mai 1942 wurde ich, Rüdiger Bücker, als zweiter Sohn des Wirtschaftsberaters Dr. Wilhelm Bücker und seiner Ehefrau Elisabeth, geb. Strott-Röper, in Münster in Westfalen geboren. Ich besitze die deutsche Staatsangehörigkeit.

Nach vier Jahren Volksschule besuchte ich von 1952 bis 1956 das Staatliche Gymnasium Paulinum, das ich dann verließ, weil mir dort kein neusprachlicher Zweig offenstand. Von 1956 bis 1963 ging ich zum Hittorf-Gymnasium in Münster, wo ich am 9. März 1963 die Reifeprüfung ablegte. Im Sommersemester 1963 begann ich an der Westfälischen Wilhelms-Universität das Studium der Betriebswirtschaftslehre. Am 11. Oktober 1967 bestand ich dort die Diplomprüfung für Kaufleute.

Nach Abschluß meines Studiums bemühte ich mich um ein Dissertations-Thema und wurde freier Doktorand von Herrn Professor Dr. J. Bleymüller am Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster. Da für mich keine Möglichkeit bestand, eine Stelle als wissenschaftliche Hilfskraft dort zu bekommen, war ich von Anfang 1968 bis Ende 1969 als Assistent des Bundestagsabgeordneten, Rudolf Opitz aus Münster, in Bonn tätig und konnte dabei gute Einblicke in die Politik gewinnen.

Seit April 1970 bin ich als wissenschaftliche Hilfskraft am Institut für Ökonometrie und Wirtschaftsstatistik der Universität Münster beschäftigt. Dort bin ich damit beauftragt, Lehrveranstaltungen im Rahmen des Tutorenprogramms für die statistische Grundausbildung von Volks- und Betriebswirten durchzuführen.